

**Quantensymmetrien des q-deformierten
Minkowski-Raumes
und die q-Dirac-Gleichung**

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Arne Schirrmacher

aus Jever (Friesland)

München, den 4. August 1993

Referent: Prof. Dr. J. Wess
Korreferent: Prof. Dr. M. Schottenloher
Tag der mündlichen Prüfung: 10. Januar 1994

Zusammenfassung

Die Anwendbarkeit von Quantengruppen zur Beschreibung von raum-zeitlichen Symmetrien in Modellen der relativistischen Physik wird am Beispiel der Diracschen Elektronentheorie diskutiert. Unter Verallgemeinerung von Twistormethoden auf Quantenmatrixgruppen werden zwei verschiedene Deformationen der Lorentz-Gruppe konstruiert, die einen nichtkommutativen Minkowski-Raum transformieren. Die Erweiterung zur q -deformierten Poincaré-Gruppe wird diskutiert. Dem q -Minkowski-Raum entspricht eine Quantisierung von Raum und Zeit, bei der in Analogie zum Drehimpuls in der Quantenmechanik nicht mehr alle Komponenten simultan meßbar sind. Mit Hilfe der die Deformation charakterisierenden \hat{R} -Matrix wird die zugehörige q -Lorentz-Lie-Algebra durch eine Dualität von Quantengruppe und Quanten-Lie-Algebra berechnet. Sie kann wie die deformierte Gruppe als quadratische Algebra dargestellt werden. Spinor- und Vektordarstellung der Algebra werden berechnet. Durch geeignete Definition q -deformierter Dirac-Matrizen wird eine Verallgemeinerung der Dirac-Gleichung angeben, die kovariant unter q -Lorentz-Transformationen und mit den Realitätsbedingungen für den Impuls verträglich ist. Die bilinearen Kovarianten werden angegeben. Für den Fall freier Teilchen wird gezeigt, daß sich die beschriebenen Zustände durch Energievorzeichen und Spinausrichtung charakterisieren lassen.

Vorwort

Viele glückliche Umstände haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Vor allem möchte ich dem Betreuer dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr. Julius Wess für die Möglichkeit, bei ihm zu promovieren, und für die vielfältige Unterstützung dabei meinen Dank aussprechen und ihm und der Max-Planck-Gesellschaft für die Gewährung eines Promotionsstipendiums danken. Die Studienstiftung des deutschen Volkes stand mir mit ihrer ideellen Förderung und mit der Gewährung von Sonderbeihilfen für Konferenzbesuche hilfreich zur Seite.

Die sehr guten wissenschaftlichen Arbeitsbedingungen und die angenehme Atmosphäre am Max-Planck-Institut ermöglichten einen fruchtbaren Gedankenaustausch mit vielen Institutsmitgliedern, der seinen Niederschlag in dieser Arbeit gefunden hat. Insbesondere möchte ich Herrn Jochen Schwenk und Herrn Mathias Pillin für ihre unermüdliche Diskussionsbereitschaft, ihre guten Ideen und stetige Unterstützung in allen Belangen danken.

Den Mitarbeitern des Lehrstuhls Wess an der Ludwig-Maximilians-Universität danke ich für Diskussionen; Herrn Dr. Wolfgang Weich und Herrn Ralf Weixler verdanke ich wichtige Hinweise.

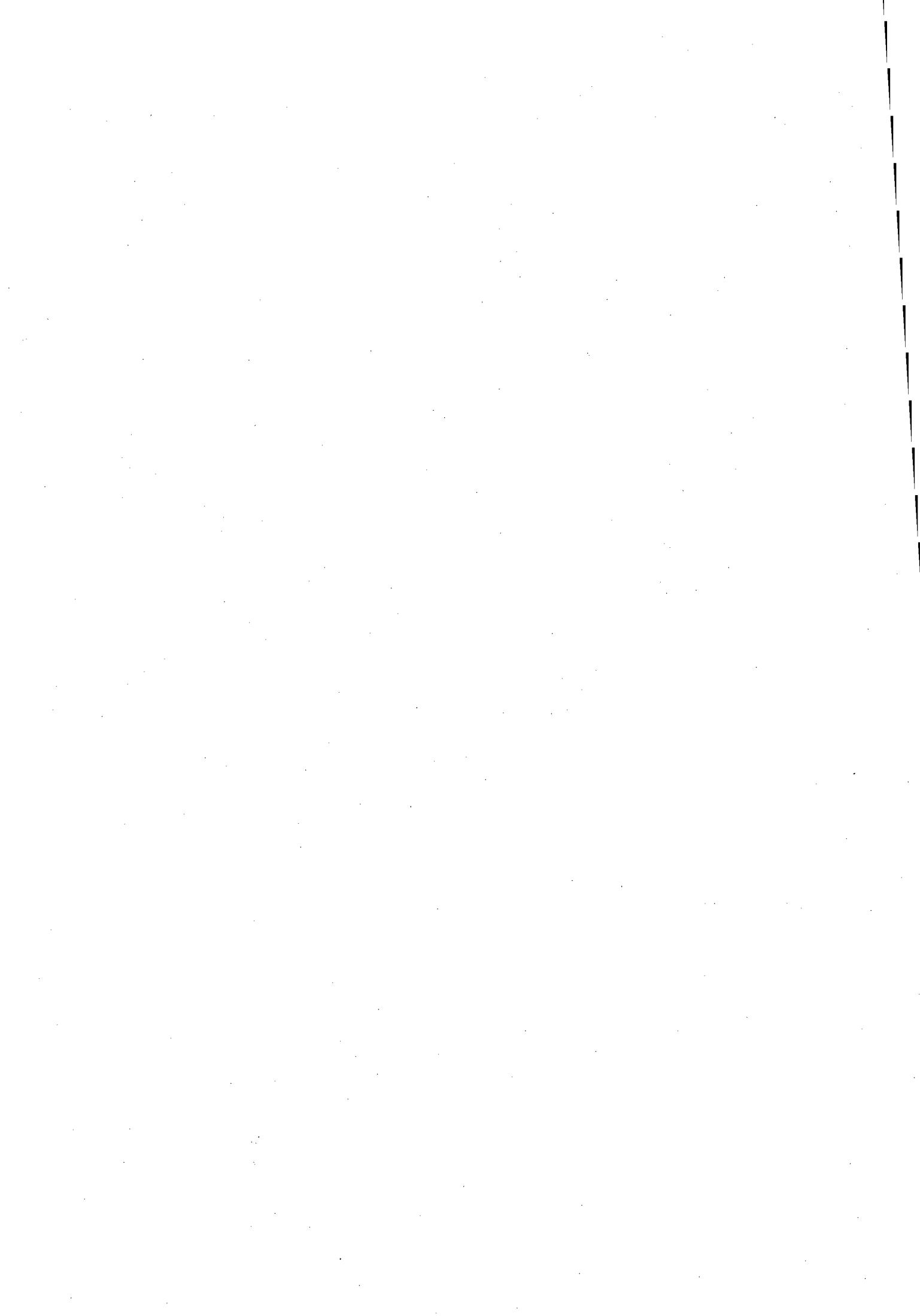
Eine wesentliche Motivation bei der Durchführung dieser Arbeit waren die Möglichkeiten, im In- und Ausland Ergebnisse vorzutragen und in Diskussionen Anregungen zu erhalten. Den Instituten in Göttingen, Oxford, Breslau, Cambridge und Dubna sei für die Einladungen gedankt.

Ohne die verständnisvolle Unterstützung meiner Freundin, die mich nie vergessen ließ, daß die Physik nicht einziger Lebensinhalt sein kann, wäre diese Arbeit in dieser Form ebensowenig entstanden, wie sie ohne die vielfältige Unterstützung, die Zuversicht und das Verständnis meiner Eltern möglich gewesen wäre, denen ich diese Arbeit widmen möchte.

Die vorliegende Dissertationsschrift in deutscher Sprache basiert in weiten Teilen auf bereits während des Promotionszeitraums in englischer Sprache veröffentlichten Ergebnissen.

- Multiparameter R-matrices and their quantum groups, *Journal of Physics A* 24 (1991), S. L1248-L1258.
- The structure of $U_q(sl(2,C))$, *Letters in Mathematical Physics* 29 (1993), S. 329-338.
- The algebra of q-deformed g-matrices, *Anales de Fisica, Monografias* 1, Madrid 1993, S. 184-187.
- Quantum groups, quantum spacetime, and Dirac equation, in: H. Osborn (Hg.): *Low-dimensional Topology and Quantum Field Theory*, New York 1993, S. 221-230.

Diese Artikel sind am Ende reproduziert.



Inhalt

1 Ausgangspunkte	3
1.1 Fragestellung	3
1.2 Raum und Zeit in der Physik	3
1.3 Der Minkowski-Raum als Twistor-Mannigfaltigkeit	6
1.3.1 Projektive Räume	6
1.3.2 Grassmann-Mannigfaltigkeiten	6
1.3.3 Homogene Räume	7
1.3.4 Minkowski-Raum	8
1.3.5 Poincaré- und Lorentz-Gruppe	9
1.4 q -Deformation von Matrixgruppen	11
2 q-Deformationen von Lorentz- und Poincaré-Gruppe	13
2.1 Die Quantendeformation von $SL(2, \mathbf{C})$ als Unterstruktur in $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$	13
2.2 Quantisierung von Minkowski-Raum und Lorentz-Gruppe	18
2.3 Quantisierung der Poincaré-Gruppe	25
2.4 Hopf-* -Algebra-Strukturen	27
2.5 \hat{R} -Matrixrelationen für Quantenebenen	29
2.6 Anhang	33
2.6.1 Skalierungseigenschaften	33
2.6.2 Bestimmung der Metrik	33
2.6.3 Rechenschritte	34
2.6.4 Probleme der Deformation der Poincaré-Gruppe	35
3 Die q-deformierte Lorentz-Lie-Algebra	37
3.1 Einleitung	37
3.2 Zwei Arten von R -Matrixrelationen	38
3.3 Einführung eines neuen Erzeugendensystems der einhüllenden Lie-Algebra	39
3.4 Die q -Lie-Algebra Relationen der Lorentz-Gruppe	40
3.5 Die Komultiplikation der q -Lorentz-Generatoren	42
3.6 Die Realitätsstruktur der q -Lie-Algebra	43

3.7	Die Dualität von q -Lie-Algebra und Quantengruppe; die q -adjungierte Darstellung	43
3.8	Eine Darstellung der Lorentz-Algebra im Spinorraum	45
3.9	Anhang	49
4	Die q-deformierte Dirac-Gleichung	52
4.1	Die Problemstellung	52
4.2	Die q -Dirac-Algebra	53
4.3	Konjugation und Dirac-Operator	55
4.4	Kovarianz der q -Dirac-Gleichung	57
4.5	Lösungen im Ruhesystem	58
4.6	Allgemeine Lösungen	59
4.7	Bilineare Kovarianten	61
4.8	Charakterisierung der Einteilchen-Zustände	62
4.9	Anhang	64
Literaturverzeichnis		65

Kapitel 1

Ausgangspunkte

“... since the time of the creation of general relativity and quantum mechanics there has been an increasing tendency to consider space-time as a physical system in its own right.” [22]

1.1 Fragestellung

Quantengruppen und nichtkommutative Geometrie sind innerhalb von kurzer Zeit zu einem bedeutenden Forschungsgebiet der mathematischen Physik geworden [12, 7]. q -Deformationen von Lie-Gruppen, Lie-Algebren und Koordinatenräumen sind für viele Fälle bekannt und weisen auf eine einheitliche Theorie [38, 19]. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Quantendeformationen des Minkowski-Raumes und seinen Symmetrien. Im Vergleich zu anderen Zugängen wird hierbei die aus der Twistortheorie bekannte Beschreibung des Minkowski-Raumes zugrundegelegt. In diesem ersten Kapitel werden einige Bemerkungen zur physikalischen Beschreibung von Raum und Zeit gemacht sowie einige Grundlagen der Twistortheorie und der Quantengruppenstruktur dargestellt. Im zweiten Kapitel werden verschiedene Quantendeformationen der Lorentz-Gruppe durch Methoden der Twistortheorie konstruiert und ihre Erweiterbarkeit zur Poincaré-Gruppe diskutiert. Das dritte Kapitel gibt eine Beschreibung der q -Lorentz-Lie-Algebra, die eine einfache aus der $SL_q(2)$ Quantengruppe ableitbare Struktur hat. Im vierten Kapitel wird die q -deformierte Dirac-Gleichung für den quantisierten Minkowski-Raum konstruiert und Lösungen der freien Theorie angegeben. Es zeigt sich, daß im Rahmen der q -Deformation des Minkowski-Raumes eine relativistische Teilchentheorie konstruiert werden kann.

1.2 Raum und Zeit in der Physik

Wir leben in einer Welt, die offensichtlich drei Raumdimensionen aufweist und sich in der Zeit verändert. In der Physik haben sich verschiedene mathematische Beschreibungen zur Charakterisierung von Ort und Zeit etabliert. Das Spektrum reicht von der Angabe dreier von der Zeit abhängender kartesischer Koordinaten $x^i(t)$ ($i = 1, 2, 3$)

über das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum x^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) und verallgemeinerten projektiven Räumen wie den Grassmann-Mannigfaltigkeiten, die das Fehlen eines ausgezeichneten Ursprungs eines homogenen Raumes widerspiegeln, bis hin zum “Penrose Paradies” (Manin) der projektiven Twistoren, die Raum und Zeit zu einer abgeleiteten Struktur machen. Daneben gibt es Ansätze, Raum und Zeit aus Kohomologien diskreter Komplexe (Bohm), aus topologischen Netzen (Isham) oder (quanten-)logischen zeitlichen Alternativen (Finkelstein, von Weizsäcker) zu konstruieren. In den angelsächsischen Ländern gibt es zudem eine überwiegend von Philosophen geführte, z. T. durchaus technische Diskussion über die Fragen nach der Kontinuierlichkeit, der topologischen Struktur und den metrischen Eigenschaften von Raum und Zeit (Grünbaum, Newton-Smith; für einen Überblick vgl. [25] mit zahlreichen Referenzen).

Die jahrtausendealte Frage nach der Teilbarkeit der Materie kann auf Raum und Zeit selbst gerichtet werden, und so wurde seit der Entstehung der Quantenphysik die Frage immer wieder aufgeworfen, ob nicht auch Raum und Zeit eine quantisierte, d. h. diskrete Struktur haben — eine Frage, die auch Riemann, ausgehend von der Überlegung, ob nicht eine Welt endlicher Quantitäten mit einer Mannigfaltigkeit endlicher Struktur beschrieben werden müßte, in seinem Göttinger Habilitationsvortrag von 1854 gestellt hatte [40, S. 286]:

“Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.”

In einer Abhandlung über Plancks Erklärung der Strahlungsgesetze durch die Einführung endlicher Energiequanten kam Poincaré kurz vor seinem Tode im Jahre 1912 zu dem Schluß, daß ganz allgemein “[e]in physikalisches System nur einer endlichen Anzahl untereinander verschiedener Zustände fähig” sei, und er verstand unter einem Raumgebiet eine “sehr große Anzahl von einzelnen über den Raum verstreuten Punkten” [36, S. 182f.]. Die Entwicklung der Quantenmechanik führte Heisenberg zu dem Postulat [15, S. 513]:

“Die bekannten Divergenzschwierigkeiten in der Theorie der Elementarteilchen zeigen, daß die zukünftige Theorie in ihren Grundlagen eine universelle Konstante von der Dimension einer Länge enthalten wird...”

Dieser Vorschlag löste in den 40er Jahren eine Diskussion über quantisierte Raum-Zeit aus: Snyder schlug eine Lorentz-invariante diskrete Raum-Zeit vor, deren wesentliches Charakteristikum es war, daß der Kommutator von Ortskoordinaten in den Drehimpuls schließt $[x, y] = (ia^2/\hbar)L_z$ etc., wobei a eine kleine universelle Länge ist [52]. Dieses Modell wurde von mehreren Autoren aufgegriffen und erweitert [64, 16, 41]. Hill führte eine Gitterstruktur für Energie und Impuls ein als eine abzählbare Menge von Viererimpulsen, die die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllen [17].

Damit sind nur einige frühe Beispiele genannt. Eine aussagekräftige Theorie entwickelte sich nicht, auch wenn die Überzeugung blieb, daß eine diskrete Raum-Zeit-Struktur der Natur zugrundeliegen sollte. So stellte Feynman die Frage [14, S. 57f.]:

“Why should it take an infinite amount of logic to figure out what one tiny piece of space/time is going to do?”

und er hoffte,

“...that in the end the machinery will be revealed, and the laws will be simple, like the chequer board with all its apparent complexities.”

Ebenso ist die von Penrose begründete Twistortheorie als eine Theorie entstanden, die Raum und Zeit quantisieren sollte, um so Divergenzen der Quantenfeldtheorie zu beseitigen und zu einer Synthese von Quantentheorie und allgemeiner Relativität zu führen [31]. Und auch Penrose betonte [31, S. 243]:

“... that to accept that there are as many points in 10^{-13}cm or even 10^{-1000}cm as there are in the entire universe is physically unrealistic and that our use of the continuum arises solely from its mathematical utility.”

Die Art und Weise aber, dies zu erreichen, war von den oben genannten völlig verschiedenen:

“One should rather be thinking of quantizing space-time itself. This should not be conceived as simply replacing the continuum by a discrete set of points ... but rather as seeking a way of treating points as ‘smeared out’ just as quantum theory smears out particles.”

Eine etwas später entwickelte Theorie, die Raum und Zeit auf einem kubischen Gitter manifest diskret beschrieb, war die 1974 von Wilson begründete Gittereichtheorie [61]. Sie verstand sich allerdings nicht als fundamentale Quantisierung von Raum und Zeit, sondern ausschließlich als mögliche Näherung für ein Raum-Zeit-Kontinuum für Berechnungen in der Quantenchromodynamik.

In jüngerer Zeit hat sich die Tendenz durchgesetzt, die beiden wesentlichen Umwälzungen in der theoretischen Physik dieses Jahrhunderts unter der gemeinsamen Struktur einer Deformation mit den Deformationsparametern \hbar der Quantenmechanik und c der speziellen Relativitätstheorie zu sehen. Aus der Tatsache, daß es in der Physik nur drei grundlegende dimensionstragende Konstanten gibt, folgert Faddeev, daß es vielleicht genau einer weiteren Deformation bedürfe, um die Physik zu vollenden [13].

In der vorliegenden Arbeit wird dieser Deformationsgedanke aufgegriffen, indem die q -Deformation zur Quantisierung von Raum und Zeit verwendet wird. Im Übergang von der klassischen zur quantenmechanischen Beschreibung werden physikalische Größen zu Operatoren, die u. U. nicht mehr miteinander vertauschen. Grundlegende Beispiele sind die Heisenberg-Algebra für Ort und Impuls

$$[x, p] = i\hbar \quad (1.1)$$

oder die Drehimpulse, die die Lie-Algebra der nichtabelschen Drehgruppe erfüllen:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k . \quad (1.2)$$

Analog zu diesen Beispielen ersetzt die q -Deformation der Raum-Zeit die kommutativen Koordinaten durch eine nichtkommutative Algebra. Wie beim Drehimpuls in der Quantenmechanik sind nicht mehr alle Komponenten zugleich scharf meßbar. Die nicht-diagonalen Operatoren wirken als Auf- und Absteigeoperatoren, die diskrete Spektren generieren. Die einfachste Struktur dieser Art ist die sogenannte Quantenebene

$$xy = q \ yx . \quad (1.3)$$

Durch die Entdeckung der Quantengruppen steht nun eine konkrete Deformationsstruktur für Koordinatenalgebren zur Verfügung, die die Quantisierung der Symmetrien zum ersten Mal mit einschließt. Der Formalismus hierzu wird in Abschnitt 1.4 kurz eingeführt.

1.3 Der Minkowski-Raum als Twistor-Mannigfaltigkeit

Der Minkowski-Raum ist ein homogener Raum mit einer natürlichen Gruppe von Transformationen. Projektive Räume und deren Verallgemeinerungen, die Grassmann-Mannigfaltigkeiten, sind neben dem R^4 Beispiele für homogene Räume, die wir als Grundlage zur Formulierung von Raum-Zeit-Symmetrien betrachten werden. Der Minkowski-Raum in seiner Formulierung als Twistor-Mannigfaltigkeit wird Ausgangspunkt der Quantisierung der Raum-Zeit-Symmetrien in Kapitel 2.

1.3.1 Projektive Räume

Seit Riemann ist der Begriff der Mannigfaltigkeit aus der Physik nicht mehr wegzudenken. Er ist implizit, wenn nichtkartesische Koordinaten benutzt werden, die Orbits von Lie-Gruppen analysiert werden etc. Eine weite Klasse von Mannigfaltigkeiten sind die projektiven Räume. Der reelle (komplexe) projektive Raum \mathbf{RP}^n (\mathbf{CP}^n) ist die Menge der Geraden durch den Ursprung im \mathbf{R}^{n+1} (\mathbf{C}^{n+1}). Zur Charakterisierung der Geraden aus unendlich vielen Punkten mit $n + 1$ homogenen Koordinaten $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$, $\mathbf{x} \sim \alpha \mathbf{x}$, reichen n inhomogene Koordinaten (ξ_1, \dots, ξ_n) , die man z.B. erhalten kann durch $\xi_i = x_i/x_0$ wenn $x_0 \neq 0$. Um die Mannigfaltigkeit \mathbf{RP}^n (\mathbf{CP}^n) vollständig zu beschreiben, braucht man mehrere Karten ξ . Penrose hat vorgeschlagen, die übliche Raum-Zeit-Struktur durch eine neue Struktur von *Twistoren* zu beschreiben [30]. Ein hierzu verwandelter Raum ist der \mathbf{CP}^3 . Er korrespondiert mit einem verallgemeinerten projektiven Raum, den wir nun einführen.

1.3.2 Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Der Begriff des projektiven Raumes in seiner geometrischen Interpretation als Geraden im \mathbf{R}^n oder \mathbf{C}^n lässt sich zu höherdimensionalen Fällen verallgemeinern. Dies führt zur Theorie der Flaggen-Mannigfaltigkeiten [30, 57]. Wir betrachten hier nur die einfachste

Möglichkeit der zweidimensionalen Ebenen im vierdimensionalen komplexen Raum. Sie bilden eine sogenannte Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,4}(\mathbf{C})$ [56]. In homogenen Koordinaten wird sie durch eine 2×4 Matrix beschrieben, die wir in $Y, Z \in M(2 \times 2, \mathbf{C})$ aufteilen:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Die Äquivalenzrelation, die bei den Geraden die Multiplikation mit einer Konstanten war, ist nun

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} (A) = \begin{bmatrix} YA \\ ZA \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

mit $A \in GL(2, \mathbf{C})$. Für invertierbares Z erhalten wir eine Karte auf inhomogene Koordinaten $X = YZ^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} YZ^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Die gesamte Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,4}(\mathbf{C})$ wird im Twistor-Ansatz als komplexfizierter und kompaktifizierter Minkowski-Raum betrachtet. Die angegebene Karte X , eingeschränkt auf den Raum der hermitischen Matrizen, kann als der übliche nicht-kompakte reelle Minkowski-Raum verstanden werden.

1.3.3 Homogene Räume

Spätestens seit Newton ist die Vorstellung vom Raum und der Zeit mit Homogenität verbunden, d. h. der leere Raum sieht an jeder Stelle und zu jedem Zeitpunkt gleich aus. Der Raum ist für Teilchen, die nicht wechselwirken, „leer“. Diese Vorstellung führt zu den Erhaltungssätzen der klassischen Mechanik und ist die Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie. Neben dem \mathbf{R}^4 sind auch \mathbf{CP}^3 und $G_{2,4}(\mathbf{C})$ homogene Räume und unter entsprechenden Einschränkungen vierdimensional. Mathematisch gesprochen ist ein homogener Raum eine Mannigfaltigkeit M , auf der eine Transformationsgruppe G *transitiv* wirkt, d.h. zu je zwei Punkten p_1 und p_2 der Mannigfaltigkeit gibt es mindestens eine Transformation T , die den einen Punkt in den anderen überführt: $T(p_1) = p_2$. Die Transformationsgruppe ist eine Lie-Gruppe, wenn die Transformationen stetig-differenzierbar parametrisierbar sind. Der *Orbit* einer Gruppe G zu einem Punkt $p \in M$ ist die Menge aller Punkte, die durch Transformationen mit Elementen von G aus p hervorgehen: $Gp = \{T(p) | T \in G\}$. Insbesondere ist Gp ein homogener Raum. Betrachten wir zwei Beispiele:

- (i) Durch Drehungen lässt sich jede Gerade durch den Ursprung in \mathbf{R}^4 in jede andere transformieren. Also ist \mathbf{RP}^3 mit $O(4)$ ein homogener Raum. Die Stabilitätsgruppe eines Elements, z.B. $(1, 0, 0, 0)$, ist $O(1) \times O(3)$ ($O(1) = \mathbf{Z}_2 = \{-1, +1\}$). Wir finden

$$\mathbf{RP}^3 \cong O(4)/(O(1) \times O(3)) \cong S^3/\mathbf{Z}_2, \quad (1.7)$$

die 3-Sphäre mit identifizierten gegenüberliegenden Punkten. Wir haben den projektiven Raum insbesondere als sogenannten Koset-Raum identifiziert. Es gilt allgemein, daß solche Räume homogen sind.

(ii) Für den homogenen Raum der komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,4}(\mathbf{C})$ mit der Gruppe $SU(2, 2)$ kann ähnlich geschlossen werden. Betrachten wir die Stabilitätsgruppe für ein möglichst einfaches Element:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} BD^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Mit der Metrik $\Phi = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ folgt, daß die Untermatrizen B und D verschwinden, während A und C unitär sind und das Produkt der Determinanten Eins beträgt. Damit kann geschrieben werden

$$G_{2,4}(\mathbf{C}) \cong SU(2, 2)/(S(U(2) \times U(2))), \quad (1.9)$$

wobei $S(\dots)$ für Unimodularität steht.

1.3.4 Minkowski-Raum

Der Minkowski-Raum \mathbf{M}^4 ist definiert als \mathbf{R}^4 mit einer reellen nichtentarteten bilinearen Form g der Signatur $(+, -, -, -)$, in einer geeigneten Basis

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Ein Punkt in \mathbf{M}^4 wird üblicherweise als vierkomponentiger Vektor geschrieben $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Als Alternative betrachten wir die folgende Abbildung des Minkowski-Raumes:

$$\mathbf{M}^4 \longrightarrow \mathbf{H}(2) : \quad \mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = X. \quad (1.11)$$

In dieser zweiten Beschreibungsweise haben wir den Minkowski-Raum in zweidimensionale hermitische Matrizen $\mathbf{H}(2)$ umgewandelt. Es gilt

$$\det X = ||\mathbf{x}||_{\mathbf{M}}^2. \quad (1.12)$$

Mit den Pauli-Matrizen, $\tau_0 = \mathbf{1}$ und τ_i , kann man schreiben

$$X = x^\mu \tau_\mu. \quad (1.13)$$

Damit kann man den Minkowski-Raum in einer dritten Möglichkeit mit Spinoren in Zusammenhang bringen: Versteht man die τ 's als Vektor-Bispinor-Objekte $\tau_\mu^{AA'}$, dann haben wir M^4 in den Raum der Spinoren zweiter Stufe $S^{1,0} \otimes S^{0,1}$ abgebildet:

$$x^{AA'} = x^\mu \tau_\mu^{AA'} . \quad (1.14)$$

Wir diskutieren nun, welche Transformationen auf diesen drei Beschreibungen des Minkowski-Raumes realisiert werden können.

1.3.5 Poincaré- und Lorentz-Gruppe

Lorentz-Transformationen Λ sind die Isometrien des M^4 :

$$(\Lambda \mathbf{x}, \Lambda \mathbf{y})_g = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_g \quad \text{i.e.} \quad \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} . \quad (1.15)$$

Da der Minkowski-Raum keinen ausgezeichneten Ursprung hat, ist er translationsinvariant; Lorentz-Transformationen und Translationen bilden die Poincaré-Gruppe mit den Transformationen

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{b} . \quad (1.16)$$

Es ist eine der fundamentalen Annahmen der (speziell-relativistischen) Physik, daß die Gesetze, die ein physikalisches System im M^4 beschreiben, invariant unter Poincaré-Transformationen sind.

Der Twistorraum ist ein Darstellungsraum für $SU(2, 2)$, der vierfachen Überlagerungsgruppe der konformen Gruppe [57, 56]. Die konforme Gruppe kann auf die Poincaré-Gruppe eingeschränkt werden. Der Spinorraum ist ein Darstellungsraum für $SL(2, \mathbf{C})$, der zweifachen Überlagerung der Lorentz-Gruppe. Twistoren verallgemeinern somit Spinoren und erlauben die Einbeziehung von Translationen und konformen Transformationen.

Wir können die hermitische Matrix X in homogenen Koordinaten als Element der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,4}(\mathbf{C})$ auffassen:

$$X \hookrightarrow \begin{bmatrix} iX \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} . \quad (1.17)$$

Die hermitische Form hat in geeigneten Koordinaten die Gestalt

$$\Phi = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} . \quad (1.18)$$

Unter $SU(2, 2)$ transformiert $G_{2,4}(\mathbf{C})$ wie folgt:

$$\begin{bmatrix} iX \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} iX \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iAX + B \\ iCX + D \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} (iAX + B)(iCX + D)^{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} . \quad (1.19)$$

Die (Pseudo-)Unitarität der Transformation erfordert

$$\begin{pmatrix} A^+ & C^+ \\ B^+ & D^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

i.e.

$$A^+C = -C^+A \quad B^+D = -D^+B \quad A^+D + C^+B = 1 . \quad (1.21)$$

Die allgemeine (Möbius-) Transformation (1.19) entspricht i. a. keiner Poincaré-Transformation. Betrachten wir jedoch die Untergruppe

$$P = \left\{ T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{+-1} \end{pmatrix} \in SU(2, 2) \text{ mit } A \in SL(2, \mathbf{C}) \right\} \quad (1.22)$$

mit $AB^+ = -BA^+$ aus (1.21), so ist die Transformation

$$X \rightarrow X' = AXA^+ - iBA^+ \quad (1.23)$$

von $H(2)$ nach $H(2)$. Die hermitische Kombination $-iBA^+$ entspricht einer Translation, während die Transformation $X \rightarrow X' = AXA^+$ eine Lorentz-Transformation ist, da

$$\|\mathbf{x}\|_M \rightarrow \|\mathbf{x}'\|_M = \det(AXA^+) = \det(X) = \|\mathbf{x}\|_M \quad (1.24)$$

aufgrund der Unimodularität von A .

Ein Spinor transformiert hingegen nur unter $SL(2, \mathbf{C})$:

$$\psi^A \rightarrow \psi'^A = M_B^A \psi^B \quad \bar{\psi}^{A'} \rightarrow \bar{\psi}'^{A'} = \bar{M}_{B'}^{A'} \bar{\psi}^{B'} . \quad (1.25)$$

Die Lorentz-Transformation auf den Bispinoren ist dann

$$x'^{AA'} = M_B^A \bar{M}_{B'}^{A'} x^{BB'} . \quad (1.26)$$

Poincaré-Transformationen auf Spinoren sind nicht möglich.

1.4 q -Deformation von Matrixgruppen

Die einfachste Struktur, die eine Koordinatenalgebra nichtkommutativ macht, ist die Manin-Ebene [23]

$$xy = q \, yx , \quad (1.27)$$

die die kommutativen Koordinaten verallgemeinert. Der Faktor q kann eine beliebige komplexe Zahl sein; in dieser Arbeit werden wir $q \in \mathbf{R}$ voraussetzen. Ebenso kann man antikommulative Koordinatenalgebren (z. B. die Differentiale von x und y) verallgemeinern zu

$$\xi\eta = -q' \, \eta\xi , \quad \xi^2 = \eta^2 = 0 . \quad (1.28)$$

Betrachtet man lineare Transformationen auf diesen Quantenebenen, die die Relationen invariant lassen, so findet man eine Quantengruppenmatrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

mit den Relationen [23, 42], $p = 1/q'$,

$$\begin{array}{lll} ab & = & p \, ba \\ ac & = & q \, ca \\ ad & = & da + (p - q^{-1}) \, bc \end{array} \quad \begin{array}{lll} cd & = & p \, dc \\ bd & = & q \, db \\ bc & = & q \, p^{-1} \, cb . \end{array} \quad (1.30)$$

Eine q -Determinante kann definiert werden

$$\det_q M = ad - q \, cb , \quad (1.31)$$

die i. a. keine in der Koordinatenalgebra zentrale Größe ist. Unter der Quantengruppeigenschaft versteht man, daß das Matrixprodukt zweier Quantenmatrizen gleicher Vertauschungsrelationsstruktur, die untereinander vertauschen, wiederum die gleichen Relationen besitzt.

Eine Systematisierung der Beschreibung von Quantengruppen gelingt mit dem \hat{R} -Matrix-Formalismus [38]: Die Relationen (1.30) können aufgrund ihrer quadratischen Struktur als

$$\hat{R}^{ij}_{ab} T^a_k T^b_l = T^i_c T^j_d \hat{R}^{cd}_{kl} \quad (1.32)$$

oder kurz als $\hat{R}TT = TT\hat{R}$ geschrieben werden. Im Beispiel (1.30) haben wir:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} q & & & \\ & q - \frac{1}{p} & \frac{q}{p} & \\ & 1 & & \\ & & & q \end{pmatrix} . \quad (1.33)$$

Die Quantenebenen sind unter Transformationen T erhalten, wenn sie in der Form

$$f(\hat{R}) xx = 0 \quad (1.34)$$

angegeben werden können, wobei f ein Polynom ist, da mit (1.32) auch $f(\hat{R})TT = TT f(\hat{R})$ gilt. Die \hat{R} -Matrix ist wesentlich eingeschränkt durch zwei Forderungen: Erstens müssen die Relationen (1.33) im quadratischen Teil der Algebra die gleiche Anzahl linear unabhängiger Elemente wie im kommutativen Fall erlauben. Zweitens dürfen die RTT -Relationen in höheren Ordnungen der Algebra zu keinen neuen Relationen führen; dies wird im wesentlichen durch die Yang-Baxter-Gleichung gewährleistet, die die Zopfgruppenstruktur bei mehrfachen Vertauschungen von Produkten der Algebraelemente implementiert:

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23} . \quad (1.35)$$

(Die stärkere Forderung nach Polynomialität der Algebra wird zumindest im Fall von Quantengruppen zum Typ A_n durch diese Konstruktion sichergestellt [46, 53].)

Die \hat{R} -Matrizen können entsprechend ihrer Eigenwerte in orthogonale Projektoren zerlegt werden $\hat{R} = \sum_i P_i$. Die Polynome, die die Quantenebenen festlegen, sind gerade bestimmt durch $f_i(\hat{R}) = P_i$.

Kapitel 2

q -Deformationen von Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Die einfache Quantengruppenstruktur $SL_q(2)$ lässt sich zu zwei verschiedenen Quantendeformationen der Lorentz-Gruppe erweitern. Eine Vergrößerung zu einer q -deformierten Poincaré-Gruppe ist unter bestimmten Bedingungen ebenfalls möglich. Die Methode dazu ist die Verwendung von Verallgemeinerungen projektiver Räume aus der Twistor-Theorie.

2.1 Die Quantendefinition von $SL(2, \mathbf{C})$ als Unterstruktur in $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$

Die Quantengruppe $SL_q(2)$ ist durch eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

gegeben, deren Einträge im Vergleich zur allgemeinen Quantenmatrix von Abschnitt 1.4 die folgenden spezielleren Relationen erfüllen, $\lambda = q - q^{-1}$,

$$\begin{array}{lll} ab = q ba & ac = q ca \\ cd = q dc & bd = q db \\ bc = cb & ad = da + \lambda bc \end{array} \quad (2.2)$$

und damit der Unimodularitätsbedingung

$$\det_q M = ad - q bc = 1 \quad (2.3)$$

genügen können. Die inverse Quantenmatrix M^{-1} ist konsistent festgelegt durch die Forderung $MM^{-1} = M^{-1}M = \mathbf{1}$ und ergibt sich zu

$$M = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Die Komultiplikation wird durch Matrixmultiplikation generiert

$$\Delta(M) = M \otimes M. \quad (2.5)$$

Dies ergibt in unserem Fall

$$\begin{aligned} \Delta a &= a \otimes a + b \otimes c & \Delta b &= a \otimes b + b \otimes d \\ \Delta c &= c \otimes a + b \otimes c & \Delta d &= c \otimes b + d \otimes d. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Quantenebene oder der Links-Komodul der Gruppe $\binom{x}{y}$ hat die Vertauschungsrelation

$$xy = q yx. \quad (2.7)$$

Im Übergang von reellen zu komplexen Räumen verdoppelt sich die Anzahl der (reellen) Freiheitsgrade und damit der Grundvariablen. Bei einer (Matrix-) Algebra gibt es dann entsprechend für jedes generierende Element $m^i{}_k$ ($1 \leq i, k \leq n$) in einer *-Algebra ein zusätzliches Element $\bar{m}^i{}_k$. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf den Fall $q \in \mathbf{R}$. Die konjugierten Elemente zu a, b, c, d erfüllen dann notwendigerweise

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &= q^{-1} \bar{b}\bar{a} & \bar{a}\bar{c} &= q^{-1} \bar{c}\bar{a} \\ \bar{c}\bar{d} &= q^{-1} \bar{d}\bar{c} & \bar{b}\bar{d} &= q^{-1} \bar{d}\bar{b} \\ \bar{b}\bar{c} &= \bar{c}\bar{b} & \bar{a}\bar{d} &= \bar{d}\bar{a} - \lambda \bar{b}\bar{c}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Um die Relationen für gemischte Paare von Elementen zu erhalten, ist es notwendig, die Quantendefinition über der linearen Hülle $\langle m^i{}_k, \bar{m}^j{}_l \rangle_{1 \leq i,j,k,l \leq 2}$ zu betrachten. Dies kann man für $SL_q(2, \mathbf{C})$ (und entsprechend für $SL_q(n, \mathbf{C})$) wie folgt realisieren: Mit M vom Typ $SL_q(2)$ ist auch $M^* = M^{+^{-1}}$ vom gleichen Typ und erfüllt die Relationen (2.2). Diese beiden Matrizen können entsprechend (1.22) in eine vierdimensionale eingebettet werden (vgl. auch [11]):

$$T = \begin{pmatrix} M & \\ & M^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & d & & \\ & & \bar{d} & -q\bar{c} \\ & & -q^{-1}\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Diese neue Matrix ist (pseudo-)unitär bezüglich einer quadratischen Form Φ

$$(\psi_1, \psi_2) := \psi_1^+ \Phi \psi_2 = \overline{\psi_1} \psi_2 \quad (2.10)$$

mit $\overline{\psi} = \psi^+ \Phi$, d. h. das Skalarprodukt ist unter der Transformation $\psi \rightarrow T\psi$ invariant:

$$\Phi \longrightarrow T^+ \Phi T = \Phi \quad \text{mit} \quad \Phi = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Die Hermitizität eines Operators H wird ausgedrückt durch

$$(\psi, H\phi) = (H\psi, \phi) \quad \text{i.e.} \quad H^+ = \Phi H \Phi^{-1}. \quad (2.12)$$

Die Quantengruppe $SL_q(2, \mathbb{C})$ kann so als eine Untergruppe von $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ identifiziert werden. Wir führen die Quantenebene als $\mathbf{x} = (x, y, -q^{1/2}\bar{y}, q^{-1/2}\bar{x})$ ein. Sie transformiert sich: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = T\mathbf{x}$.

Wir werden nun die Deformationen von $SL_q(2, \mathbb{C})$ analysieren, die durch eine Familie von Multiparameter-Deformationen von $SU(2, 2)$ induziert werden. Diese ist definiert durch R -Matrizen von Flaggenform, d.h. sie sind in einer geeigneten Basis eine direkte Summe dreieckiger Untermatrizen. In vier Dimensionen nimmt die R -Matrix die folgende Form an:

$$R = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc} r_{11} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & r_{12} & a_{12} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & r_{21} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & r_{13} & a_{13} & b_{13} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & r_{31} & c_{13} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & r_{22} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & r_{14} & a_{14} & b_{14} & c_{14} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & r_{41} & d_{14} & e_{14} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & r_{23} & a_{23} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & r_{32} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & r_{24} & a_{24} & b_{24} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & r_{42} & c_{24} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & r_{33} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & r_{34} & a_{34} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & r_{43} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & r_{44} & . & . \end{array} \right] \quad (2.13)$$

Die Basis hat die Indexreihenfolge $(11, 12, 21, 13, 31, 22, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 33, 34, 43, 44)$ bezüglich der Indizes 1..4 von T . Die Matrix $\hat{R} = PR$, mit P der Permutationsmatrix, hat genau dann zwei Eigenwerte, z.B. 1 und q^2 , wenn $r_{ii} = 1$, $r_{ji} = q^2/r_{ij}$ ($j > i$)

und $a_{ij} = 1 - q^2$, ungeachtet der anderen Einträge. Die Analyse der Yang-Baxter-Eigenschaft führt zu den folgenden drei Fällen:

Fall (I) Für $b_{13}, c_{13}, b_{14}, c_{14}, d_{14}, e_{14}, b_{24}, c_{24} = 0$ finden wir die Multiparameterversion der Standard- $GL_q(n)$ - R -Matrix [39, 43, 44]. Die Einbettung von $SL_q(2, \mathbf{C})$ erfordert $r_{12} = r_{21} = r_{34} = r_{43} = q$, und die Verträglichkeit der Konjugation mit den Vertauschungsrelationen führt zu den Einschränkungen $r_{24} = r_{13}$. Die gemischten Vertauschungsrelationen sind unter Verwendung von $p = r_{14}/r_{13}$ und $t = r_{13}/r_{23}$

$$\begin{array}{ll}
a\bar{a} = \bar{a}a & b\bar{a} = p^{-1} \bar{a}b \\
a\bar{b} = p^{-1} b\bar{a} & b\bar{b} = p^{-1} t^{-1} \bar{b}b \\
a\bar{c} = p \bar{c}a & b\bar{c} = \bar{c}b \\
a\bar{d} = \bar{d}a & b\bar{d} = t^{-1} \bar{d}b \\
\\
c\bar{a} = p \bar{a}c & d\bar{a} = \bar{a}d \\
c\bar{b} = \bar{b}c & d\bar{b} = t^{-1} \bar{b}d \\
c\bar{c} = tp \bar{c}c & d\bar{c} = t \bar{c}d \\
c\bar{d} = t \bar{d}c & d\bar{d} = \bar{d}d .
\end{array} \tag{2.14}$$

Insbesondere sind diese Relationen unabhängig von der Wahl von q . Mit (2.14) sind die q -Determinanten $\det_q M$ und $\det_q M^*$ zentral in der komplexen Algebra (2.9) und können zu Eins gesetzt werden.

Die komplexe Quantenebene erfüllt die Relationen

$$\begin{array}{ll}
xy = q yx & \bar{x}\bar{y} = q^{-1} \bar{y}\bar{x} \\
x\bar{y} = r_{13} \bar{y}x & y\bar{x} = r_{13} \bar{x}y \\
x\bar{x} = r_{14} \bar{x}x & y\bar{y} = r_{23} \bar{y}y .
\end{array} \tag{2.15}$$

Fall (II) Für $b_{13}, c_{13}, b_{24}, c_{24} = 0$ und $b_{14}, e_{14} \neq 0$ finden wir eine neue R -Matrix. Zur Einbettung von $SL_q(2, \mathbf{C})$ müssen folgende Gleichsetzungen gemacht werden: $r_{12} = r_{21} = r_{34} = r_{43} = q$. Die Verträglichkeit der Konjugation mit den Vertauschungsregeln erfordert hier $r_{13} = r_{24} = s$, $r_{14} = r_{23} = qs$. Wir wählen $b_{14} = -qs\lambda$, $e_{14} = qs^{-1}\lambda$. Jede gleichzeitige Skalierung von b_{14} und e_{14} führt zu einer äquivalenten Algebra, vgl. Anhang 2.6.1. Die Einträge c_{14} und d_{14} müssen verschwinden, damit die Yang-Baxter-Gleichung erfüllt ist. Mit der Schreibweise $\nu = 1 - q^2 (= -q\lambda)$ ist die R -Matrix explizit:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & q & \nu & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & q & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & s & \nu & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & q^2 s^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & qs^{-1} & \nu & s\nu & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & qs & . & -s^{-1}\nu & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & qs^{-1} & \nu & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & qs & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & s & \nu & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & q^2 s^{-1} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & q & \nu & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & q & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Die *RTT*-Relation in diesem Fall führt zu den Vertauschungsrelationen der Einträge der Quantenmatrix T

$$\begin{aligned} a\bar{a} &= \bar{a}a - q\lambda \bar{c}c & b\bar{a} &= q^{-1} \bar{a}b - \lambda \bar{c}d \\ a\bar{b} &= q^{-1} \bar{b}a - \lambda \bar{d}c & b\bar{b} &= \bar{b}b + q\lambda (a\bar{a} - \bar{d}d) \\ a\bar{c} &= q \bar{c}a & b\bar{c} &= \bar{c}b \\ a\bar{d} &= \bar{d}a & b\bar{d} &= q \bar{d}b + q\lambda a\bar{c} \\ c\bar{a} &= q \bar{a}c & d\bar{a} &= \bar{a}d \\ \bar{c}b &= \bar{b}c & d\bar{b} &= q \bar{b}d + q\lambda c\bar{a} \\ c\bar{c} &= \bar{c}c & d\bar{c} &= q^{-1} \bar{c}d \\ \bar{c}d &= q^{-1} \bar{d}c & d\bar{d} &= \bar{d}d + q\lambda \bar{c}c. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Diese Relationen sind unabhängig von s und Skalierungen von b_{14} und stimmen mit den in [35, 50] angegebenen überein. Auch in diesem Fall können die Determinanten von M und M^* zu Eins gesetzt werden. Darüberhinaus ist es in diesem Fall möglich, durch die Einschränkung $a = \bar{d}$ und $b = -q\bar{c}$ die $SU_q(2)$ als Unteralgebra zu gewinnen.

Die komplexe Quantenebene in diesem Fall erfüllt

$$\begin{aligned} xy &= q yx & \bar{x}\bar{y} &= q^{-1} \bar{y}\bar{x} \\ x\bar{y} &= q^2 s^{-1} \bar{y}x & y\bar{x} &= q^2 s^{-1} \bar{x}y \\ x\bar{x} &= q s^{-1} \bar{x}x - q\lambda y\bar{y} & y\bar{y} &= q s^{-1} \bar{y}y. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Diese Struktur, die an jene von der $GL_{p,q}(2)$ Quantengruppe und der $SO_{p,q}(4)$ Quanten-

ebene erinnert, aber nur in speziellen Parameterwahlen isomorph ist, verallgemeinert die komplexe Quantenebene von [44].

Fall (III) Für $b_{13}, c_{13}, b_{14}, c_{14}, d_{14}, e_{14}, b_{24}, c_{24} \neq 0$ findet man eine einparametrische Lösung der Yang-Baxter-Gleichung, die mit dem Ergebnis von [8] übereinstimmt. Es ist jedoch nicht möglich, die Quantengruppe $SL_q(2, \mathbb{C})$ als Unterstruktur der $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ aufzufassen, da die RTT-Relationen für die Matrix T in diesem Fall Beziehungen wie z.B. $cd = 0$ etc. implizieren, die dem Prinzip der stetigen Deformation widersprechen.

Bemerkung: Die hier konstruierten Deformationen der $SL(2, \mathbb{C})$ (mit stetigem Übergang zum kommutativen Fall) korrespondieren mit den Deformationsklassen 3.1.1 und 3.1.3 der Klassifikation von Woronowicz und Zakrzewski [62, 63]. Unser Fall (I) ist jedoch allgemeiner als jene Ergebnisse, da keine speziellen darstellungstheoretischen Annahmen vorausgesetzt wurden.

2.2 Quantisierung von Minkowski-Raum und Lorentz-Gruppe

Die Isomorphie der Lorentz-Gruppe mit $SL(2, \mathbb{C})$ wird durch die Identifikation des (reellen) Minkowski-Raumes mit dem Raum der zweidimensionalen hermitischen Matrizen induziert:

$$\mathbf{M}^4 \longrightarrow \mathrm{H}(2) : \quad x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = X \quad (2.19)$$

Es gilt $\det X = \|x\|_{\mathbf{M}}^2$. Mit $\tau_0 = \mathbf{1}$ und τ_i , den Pauli-Matrizen, kann man schreiben

$$X = \tau_\mu x^\mu . \quad (2.20)$$

In der Quantenversion kann diese Identifikation leicht verallgemeinert werden. Im folgenden schreiben wir

$$x = (A, B, C, D) \rightarrow \sqrt{q^2 + 1} \begin{pmatrix} qC & A \\ B & q^{-1}D \end{pmatrix} = X , \quad (2.21)$$

was als $X = \sigma_I x^I$ mit offensichtlichen σ_I verstanden werden kann. Für eine geeignete Wahl der Metrik g und Definition von $\det_q X$ finden wir

$$\|x\|_{\mathbf{M}}^2 = g_{IJ} x^I x^J = \det_q X . \quad (2.22)$$

Die Wirkung von $SL(2, \mathbf{C})$ auf $H(2)$ wird gegeben durch

$$X \rightarrow MXM^+ \quad (2.23)$$

und induziert eine Abbildung auf \mathbf{M}^4 , die eine Lorentz-Transformation ist, da die Minkowski-Länge erhalten bleibt. Somit ist für die deformierte Theorie zu zeigen, daß eine quantisierte Wirkung auf X die q -deformierte Minkowski-Länge invariant läßt. In diesem Fall steht die Wirkung (2.23) im Zusammenhang mit der von $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ auf $G_{2,4}^q(\mathbf{C})$. Der Einfachheit halber schreiben wir in Form von Quantenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & iY \\ 0 & Z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iY \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & iM Y \\ 0 & M^* Z \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

und identifizieren $X = YZ^{-1}$. Somit verstehen wir den q -Minkowski-Raum in homogenen Koordinaten (2-Ebenen in vierdimensionalem Raum) als eine q -Grassmann-Mannigfaltigkeit $\begin{bmatrix} iY \\ Z \end{bmatrix}$, die sich unter der Quantengruppe $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ transformiert (vgl. 1.3.4). Die nichtkommutative Struktur der verwendeten 2×4 -Matrizen übernehmen wir aus den $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ Quantenmatrizen entsprechend (2.24) [54, 24].

Zur Berechnung der Invarianz der q -Minkowski-Länge und der Vertauschungsrelationen für den Minkowski-Raum ermitteln wir nun die Relationen zwischen Y und Z . Betrachtet man die Untergruppe von $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$, die aus Matrizen der Form

$$T = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & \frac{g}{d} & h \\ & & -q^{-1}\bar{b} & -q\bar{c} \\ & & & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

besteht, so kann man wegen ihrer Transformationseigenschaften die folgende Identifikation der Vertauschungsrelationsstruktur machen¹:

$$\begin{bmatrix} iY \\ Z \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} N \\ M^* \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Fall (I) Die maximale Anzahl der Deformationsparameter für $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ beträgt $n(n-1)/2 + 1 = 7$ [44]. Die Beschränkungen $r_{12} = q$, $r_{34} = q$, $r_{13} = r_{24}$ lassen davon vier übrig. Wir schreiben q , $k = q^2/r_{13}$, $p = r_{14}/r_{13}$, $t = r_{13}/r_{23}$. Die Vertauschungsrelationen folgen aus den RTT -Relationen. Die für a, b, c, d angegebenen werden im

¹Es wird die Notation \sim für die Äquivalenz der homogenen Koordinaten der projektiven Räume und \simeq für die Gleichheit der Vertauschungsrelationsstruktur verwendet.

nächsten Abschnitt verwendet werden:

$$\begin{aligned}
ae &= k ea & e\bar{a} &= pqk^{-1}(\bar{a}e - q^{-1}\lambda \bar{b}f) \\
af &= kp^{-1} fa & e\bar{b} &= q^2 pk^{-1} \bar{b}e \\
ag &= kq^{-1} ga + \lambda ce & e\bar{c} &= qk^{-1}(\bar{c}e - q^{-1}\lambda \bar{d}f) \\
ah &= k(pq)^{-1} ha + \lambda cf & e\bar{d} &= q^2 k^{-1} \bar{d}e \\
be &= kt eb & f\bar{a} &= q^2 pk^{-1} \bar{a}f \\
bf &= k fb & f\bar{b} &= qp k^{-1} \bar{b}f \\
bg &= ktq^{-1} gb + \lambda de & f\bar{c} &= q^2 k^{-1} \bar{c}f \\
bh &= kq^{-1} hb + \lambda df & f\bar{d} &= qk^{-1} \bar{d}f \\
ce &= kq^{-1} ec & g\bar{a} &= qk^{-1}(\bar{a}g - q^{-1}\lambda \bar{b}h) \\
cf &= k(pq)^{-1} fc & g\bar{b} &= q^2 k^{-1} \bar{b}g \\
cg &= k gc & g\bar{c} &= q(kt)^{-1}(\bar{c}g - q^{-1}\lambda \bar{d}h) \\
ch &= kp^{-1} hc & g\bar{d} &= q^2(kt)^{-1} \bar{d}g \\
de &= ktq^{-1} ed & h\bar{a} &= q^2 k^{-1} \bar{a}h \\
df &= kq^{-1} fd & h\bar{b} &= qk^{-1} \bar{b}h \\
dg &= kt gd & h\bar{c} &= q^2(kt)^{-1} \bar{c}h \\
dh &= k hd & h\bar{d} &= q(kt)^{-1} \bar{d}h .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Fall (II) Die zweiparametrische Lösung (2.16) ergibt die Relationen

$$\begin{aligned}
ae &= s ea & e\bar{a} &= s^{-1} \bar{a}e - q^{-1}s^{-1}\lambda \bar{b}f - q\lambda g\bar{c} \\
af &= qs fa & e\bar{b} &= qs^{-1} \bar{b}e - q\lambda g\bar{d} \\
ag &= sq^{-1} ga + \lambda ce & e\bar{c} &= qs^{-1} \bar{c}e - s^{-1}\lambda \bar{d}f \\
ah &= s ha + \lambda cf & e\bar{d} &= q^2 s^{-1} \bar{d}e \\
be &= qs eb - qs\lambda fa & f\bar{a} &= qs^{-1} \bar{a}f - q\lambda h\bar{c} \\
bf &= s fb & f\bar{b} &= s^{-1} \bar{b}f - q\lambda h\bar{d} \\
bg &= s gb + \lambda de - s\lambda ha & f\bar{c} &= q^2 s^{-1} \bar{c}f \\
bh &= sq^{-1} hb + \lambda df & f\bar{d} &= qs^{-1} \bar{d}f \\
ce &= sq^{-1} ec & g\bar{a} &= qs^{-1} \bar{a}g - s^{-1}\lambda \bar{b}h \\
cf &= s fc & g\bar{b} &= q^2 s^{-1} \bar{b}g \\
cg &= s gc & g\bar{c} &= s^{-1} \bar{c}g - s^{-1}\lambda \bar{d}h \\
ch &= qs hc & g\bar{d} &= qs^{-1} \bar{d}g \\
de &= s ed - \lambda cf & h\bar{a} &= q^2 s^{-1} \bar{a}h \\
df &= sq^{-1} fd & h\bar{b} &= qs^{-1} \bar{b}h \\
dg &= qs gd - qs\lambda hc & h\bar{c} &= qs^{-1} \bar{c}h \\
dh &= s hd & h\bar{d} &= s^{-1} \bar{d}h .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

In beiden Fällen ist N vom Typ $GL_q(2)$

$$\begin{aligned}
ef &= q fe & gh &= q hg \\
eg &= q ge & fh &= q hf \\
fg &= gf & eh &= he + \lambda gf .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Für zwei kommutierende Quantenmatrizen M und N vom Typ $GL_q(2)$ kann gezeigt werden, daß die Relation

$$\det_q(MN) = \det_q(M) \det_q(N) \quad (2.30)$$

gilt. Im Fall von Untermatrizen von $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ ergeben sich in der expliziten Berechnung mit den Vertauschungsrelationen (2.27) bzw. (2.28) einige zusätzliche Faktoren. Mit $\begin{pmatrix} 0 & iY \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ von diesem Typ und $Q = r_{23}/(q^2 r_{13})$ im Fall (I) und $Q = 1/q^2$ für den Fall (II) berechnet man

$$\det_Q(YZ^{-1}) = \frac{1}{q^2 r_{13}} \det_q(Y) \det_{1/q}(Z^{-1}). \quad (2.31)$$

Es folgt, daß die q -Minkowski-Länge erhalten ist unter $SL_q(2, \mathbf{C})$ -Transformationen aufgrund der Unimodularität von M :

$$\det_Q(MXM^+) = \frac{1}{q^2 r_{13}} \det_q(M) \det_Q(X) \det_{1/q}(M^+) = \det_Q(X). \quad (2.32)$$

Die Komponenten von $X = YZ^{-1} \simeq NM^+$ sind in Ausdrücken von $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$

$$\begin{pmatrix} qC & A \\ B & q^{-1}D \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

i. e.

$$\begin{aligned} A &= e\bar{c} + f\bar{d} & B &= g\bar{a} + h\bar{b} \\ C &= q^{-1}(e\bar{a} + f\bar{b}) & D &= q(g\bar{c} + h\bar{d}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die Berechnung der Vertauschungsrelationen für den q -Minkowski-Vektor ergibt (vgl. Anhang 2.5.3) in

Fall (I)

$$\begin{aligned} AC &= qp CA & AD &= qt DA \\ BC &= (qp)^{-1} CB & BD &= (qt)^{-1} DB \\ CD &= DC & AB &= pt BA + tq\lambda CD \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit der invarianten Länge

$$\|X\|_{\mathbf{M}}^2 = q\omega \left(CD - q^{-2}t^{-1} AB \right), \quad (2.36)$$

wobei $\omega = q + q^{-1}$. Dies ist eine zweiparametrische (pq und tq) Deformation der Minkowski-Koordinatenalgebra. (Der Faktor von AB relativ zu CD kann nach Wunsch skaliert

werden.) Sie ist im allgemeinen nicht isomorph zu der zweiparametrischen $SO_{pq,tq}(4)$ Quantenebene [46] außer für den einparametrischen Spezialfall $p = t = 1$, in dem die euklidische Quantenebene in vier Dimensionen auch zur Quantengruppe $GL_q(2)$ isomorph ist [24]. Aus der Form der invarianten Länge und den Vertauschungsrelationen lässt sich auf die Metrik schließen (vgl. Anhang 2.5.2):

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-2}t^{-1} & 0 & 0 \\ -q^{-2}t^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega/2q \\ 0 & 0 & \omega/2q & 0 \end{pmatrix}_{IJ}. \quad (2.37)$$

Mit der Metrik ist auch die Konjugationsstruktur der euklidischen und der Minkowski-Quantenebene verschieden: Für die q -Lorentz-Gruppe ergibt die Hermitizität von X

$$\overline{A} = B, \quad \overline{B} = A, \quad \overline{C} = C, \quad \overline{D} = D, \quad (2.38)$$

wohingegen man für die Deformation von $SO(4)$ [38, 44]

$$\overline{A} = B, \quad \overline{B} = A, \quad \overline{C} = D, \quad \overline{D} = C \quad (2.39)$$

erhält aufgrund der unterschiedlichen Signatur der Metrik. Die einparametrischen Quantenebenen der ‘Standard’-Deformation von $SO(3, 1)$ und $SO(4)$ unterscheiden sich also nur durch die Realitätsstruktur.

Fall (II) ergibt die Relationen

$$\begin{aligned} AC &= CA - q^{-1}\lambda AD & AD &= q^2 DA \\ BC &= CB + q\lambda BD & BD &= q^{-2} DB \\ CD &= DC & AB &= BA + q\lambda CD - q^{-1}\lambda D^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

mit der invarianten Länge

$$\|X\|_{\mathbf{M}}^2 = q\omega (CD - q^{-2} AB). \quad (2.41)$$

Dieser Fall reproduziert die bekannten q -Minkowski-Vektor-Relationen. Im Vergleich zu [5, 50] finden wir $q \leftrightarrow 1/q$, da wir $X \rightarrow MXM^+$ gewählt haben anstatt $X \rightarrow M^+XM$.

Die Metrik ergibt sich in diesem Fall zu (vgl. Anhang 2.5.2):

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda/q \end{pmatrix}_{IJ}. \quad (2.42)$$

Eine interessante Eigenschaft der hier betrachteten Deformation ist, daß die Kombination $X^0 \sim C + D$, i.e. die Zeit-Koordinate (oder die Energie im Fall von Impulskoordinaten) zentral ist.

Da auch in diesem Fall die beiden Konjugationsstrukturen (2.38) und (2.39) möglich sind, sollte auch eine Deformation der $SO_q(4)$ mit den Relationen (2.40) möglich sein.

Die R -Matrix für die Lorentz-Gruppe in diesen Koordinaten kann aus der für $SU_{\{q_{ij}\}}(2,2)$ konstruiert werden. Ausgehend von

$$X \rightarrow MXM^+ \quad (2.43)$$

i.e.

$$\begin{aligned} X^i{}_{i'} &\rightarrow \sum_{j,j'} M^i{}_j X^j{}_{j'} M^{+ j'}{}_{i'} \\ &= \sum_{j,j'} M^i{}_j (\epsilon M^* \epsilon^{-1})^{i'}{}_{j'} X^j{}_{j'} \end{aligned} \quad (2.44)$$

mit der Spinor-Metrik

$$\epsilon = \begin{pmatrix} & q^{1/2} \\ -q^{-1/2} & \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

und $X^I \sim X^i{}_{i'}$ kann die Lorentz-Quantenmatrix Λ bestimmt werden zu

$$\Lambda = M \otimes \overline{M} = M \otimes \epsilon M^* \epsilon^{-1}, \quad (2.46)$$

so daß

$$(X')^I = \Lambda^I{}_J X^J \quad (2.47)$$

gilt. Ausgedrückt in T ist das

$$\Lambda^I{}_J = T^i{}_j [\tilde{\epsilon} T \tilde{\epsilon}^{-1}]^{i'+2}{}_{j'+2} \quad \tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Mit der üblichen Indexnotation schreiben wir das Produkt von zwei Einträgen der q -Lorentz-Matrix als

$$\Lambda_{12} \Lambda_{34} = \tilde{\epsilon}_2 \tilde{\epsilon}_4 T_1 T_2 T_3 T_4 \tilde{\epsilon}_2^{-1} \tilde{\epsilon}_4^{-1}. \quad (2.49)$$

Hindurchtauschen der Positionen 3 und 4 durch 1 und 2 unter Anwendung der Relation $R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12}$ oder $T_1T_2R_{12}^{-1} = R_{12}^{-1}T_2T_1$ ergibt

$$\mathbf{R}_{12,34}(TT)_{12}(TT)_{34} = (TT)_{34}(TT)_{12}\mathbf{R}_{12,34} \quad (2.50)$$

mit

$$\mathbf{R}_{12,34} = R_{14}R_{13}R_{24}R_{23}^{-1}. \quad (2.51)$$

R und R^{-1} wurden auf solche Art und Weise gewählt, daß \mathbf{R} die Yang-Baxter-Gleichung aufgrund der Eigenschaften von R erfüllt [5, 45]. Durch eine Ähnlichkeitstransformation

und Einschränkung auf die betrachteten Kombinationen ergibt sich die R -Matrix für die q -Lorentz-Matrix Λ zu

$$\mathbf{R}_{12,34}^{\Lambda} = \tilde{\epsilon}_2 \tilde{\epsilon}_4 \ R_{23} R_{13} R_{24} R_{14}^{-1} \ \tilde{\epsilon}_2^{-1} \tilde{\epsilon}_4^{-1} . \quad (2.52)$$

Anstatt mit den so entstehenden R -Matrizen explizit zu rechnen, kann man sich auf die Gleichungen (2.2), (2.8) und eine Angabe der ‘gemischten’ Relationen (2.14) bzw. (2.17) beschränken, die man auch in einer übersichtlichen Matrixrelation darstellen kann. Geht man von der Existenz einer sogenannten ‘universellen’ R -Matrix R aus, so muß diese nur auf einem geeigneten Darstellungsraum ausgewertet werden, um Vertauschungsrelationen von Spinoren, Vektoren etc. zu finden. Es sei ρ die Darstellung auf $x = (x, y)$ und ρ^* auf $x^* = \epsilon x = (q^{1/2}\bar{y}, -q^{-1/2}\bar{x})$. Damit gilt unter Verwendung von $(\epsilon \otimes \epsilon)R_{12}(\epsilon \otimes \epsilon)^{-1} = R_{21}$

$$\begin{aligned} (\rho \otimes \rho) \ R &= q^{-1} R_{12} \\ (\rho^* \otimes \rho^*) \ R &= q^{-1} R_{12} \end{aligned} \quad (2.53)$$

und

$$x_1 x_2 = q^{-1} R_{12} x_2 x_1 \quad x_1^* x_2^* = q^{-1} R_{12} x_2^* x_1^* \quad (2.54)$$

mit der R -Matrix (1.33) mit $p = q$ für $SL_q(2)$. Man beachte, daß wir $\overline{}$ für die formale antimultiplikative Involution benutzen, die der komplexen Konjugation entspricht, während $*$ eine abgeleitete Konjugation unter Benutzung von ϵ ist; insbesondere verwenden wir $M^* = M^{+^{-1}} = \epsilon \overline{M} \epsilon$. Aus der universellen R -Matrix läßt sich folgerichtig auch eine Vertauschungsmatrix S ableiten, die die Relationen zwischen den konjugierten und nichtkonjugierten Variablen angibt:

$$(\rho \otimes \rho^*) \ R = S \quad (2.55)$$

und es gilt

$$x_1 x_2^* = S \ x_2^* x_1 . \quad (2.56)$$

Für die beiden Fälle (I) und (II) findet man aus den Lösungen für (2.13)

$$S_I = \begin{pmatrix} r_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_{14} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & r_{13} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$S_{II} = \begin{pmatrix} q^2 s^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q s^{-1} & \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & q s^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^2 s^{-1} \end{pmatrix} .$$

Den Ergebnissen auf den Quantenebenen entsprechen für die Gruppenvariablen via $x \rightarrow Mx$

$$\begin{aligned} R_{12}M_2M_1 &= M_1M_2R_{12} \\ R_{12}M_2^*M_1^* &= M_1^*M_2^*R_{12} \\ S M_2^*M_1 &= M_1M_2^*S . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Bekannt aus [5] ist bereits S_I für den Spezialfall $s = q$; für diese Konstruktion angewandt auf $SL(3)$ vgl. [3].

2.3 Quantisierung der Poincaré-Gruppe

Mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts ist ein offensichtlicher Weg aufgezeigt, die q -Poincaré-Gruppe als Untergruppe von $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ zu konstruieren. Betrachtet man die Transformationen

$$T = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M^* \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

mit $MN^+ = -NM^+$ aufgrund der Unitarität auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit

$$\begin{bmatrix} iX \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} iY \\ Z \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} iY \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iMY + NZ \\ M^*Z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i(MXM^+ - iNM^+) \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.60}$$

und bezeichnet man den inhomogenen Anteil mit F wie folgt

$$F = -i N M^+, \tag{2.61}$$

dann ergibt sich

$$X \mapsto X' = MXM^+ + F, \quad \text{mit} \quad F^+ = F. \tag{2.62}$$

Aus (2.26) sieht man, daß F einem q -Minkowski-Vektor entspricht und somit als Translationsanteil der Poincaré-Transformation T verstanden werden kann:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{f}. \tag{2.63}$$

Nun tritt allerdings ein neues Problem auf, das mit den Untergruppeneigenschaften von Quantengruppen zusammenhängt. Mit der Vergrößerung der Algebra um die Generatoren e, f, g, h aus N muß erneut sichergestellt werden, daß die Determinanten von M und M^* in der vergrößerten Algebra zentral sind. Dies ist für die hier diskutierten Fälle i. a. nicht der Fall. Um dieses Problem zu lösen, kann man einerseits versuchen,

zu einer verwandten Algebra überzugehen, indem man z. B. von der Quantenmatrix M zu $\tilde{M} = (\det M)^{-1/2} M$ übergeht, die dann in jedem Fall die Determinante Eins hat. Hierdurch ändern sich z. B. die Relationen (2.28) in der linken Spalte um den Faktor s^{-1} und in der rechten um s , da $\det_q M \ N^i_k = s^2 \ N^i_k \ \det_q M$. Nun muß allerdings die Hopf-Algebra-Struktur neu konstruiert werden.

Die einfachere Möglichkeit ist es, die Parametereinschränkungen zu bestimmen, die die Unimodularität von M ermöglichen. Diese Möglichkeit wurde für den Fall (I) bereits in [6] durchgeführt: Zu bestimmen ist

$$P_q = \left\{ T = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M^* \end{pmatrix} \in SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2) \text{ mit } M \in SL_q(2, \mathbf{C}) \right\}. \quad (2.64)$$

Die Überprüfung der Zentralitäts- und Konjugationseigenschaften der Relationen (2.27) wird für die restriktive Wahl

$$q = 1 \quad t = 1/p \quad (2.65)$$

besonders einfach. Die Minkowski-Raum-Deformation ist dann

$$\begin{aligned} AC &= p CA & AD &= p^{-1} DA \\ BC &= p^{-1} CB & BD &= p DB \\ CD &= DC & AB &= BA. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Auf ihm wirken die q -Poincaré-Transformationen, deren Relationen sich aus den entsprechend spezialisierten Beziehungen (2.27) mit (2.60-63) ergeben.

Um die Transformationsgruppe als q -Poincaré-Gruppe zu identifizieren, müssen wir nachweisen, daß sie q -Minkowski-Abstände invariant läßt². Wie zuvor in (2.32) finden wir entsprechend:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}' - \mathbf{v}'\|_{\mathbf{M}}^2 &= \det_Q(X' - V') \\ &= \det_Q(MXM^+ + F - (MVM^+ + F)) \\ &= \det_q(M) \det_Q(X - V) \det_{1/q}(M^+) \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{M}}^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß es gelungen ist, eine nichtkommutative Verallgemeinerung der Koordinatenalgebra des Minkowski-Raumes anzugeben. Dies impliziert, daß die Minkowski-Länge zu einer in der Algebra zentralen Größe wird. Auf diesem q -Minkowski-Raum können Transformationen wirken, die diese Länge invariant lassen, die q -Lorentz-Gruppe. Darüberhinaus gibt es unter bestimmten Bedingungen auch Quantendeformationen der Poincaré-Gruppe, die wir hier nicht im allgemeinsten

²Die bisher als q -Poincaré-Gruppen benannten Strukturen genügen dieser Anforderung nicht [51, 21].

Fall bestimmt haben; für die Anwendung in Kapitel 4 können wir uns auf die Lorentz-Gruppe beschränken.

Eine Diskussion der Probleme bisheriger Versuche, eine Quantendeformation der Poincaré-Gruppe anzugeben, findet sich im Anhang.

2.4 Hopf-*-Algebra-Strukturen

Die q -Deformation von Gruppen zerstört die übliche Gruppeneigenschaft. Erhalten bleibt hingegen eine reiche algebraische Struktur, die Hopf-Algebra-Struktur, die alle wesentlichen Eigenschaften enthält, die zu einem physikalischen Symmetriebegriff notwendig sind. Zur Diskussion der Hopf-Algebren-Struktur vgl. [1, 12]. Für den in dieser Arbeit gewählten Zugang kann auf eine explizite Betrachtung der Hopf-Algebra-Struktur weitgehend verzichtet werden, da sie in der Matrix-Struktur implizit ist (Z. B. $m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \epsilon \Leftrightarrow TT^{-1} = 1$). Wir beschränken uns in diesem Abschnitt darauf, einige besonders wichtige und nichttriviale Aspekte zu diskutieren.

Die Komultiplikation der Quantengruppe $SU_{\{q_{ij}\}}(2, 2)$ wird wie bei allen Quantenmatrixgruppen durch die Matrixmultiplikation vermittelt. Dies überträgt sich auch auf die Untergruppen P_q und $SL_q(2, \mathbf{C})$.

$$\Delta : \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M^* \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M \dot{\otimes} M & M \dot{\otimes} N + N \dot{\otimes} M^* \\ 0 & M^* \dot{\otimes} M^* \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

i. e.

$$\begin{aligned} \Delta(M) &= M \otimes M \\ i\Delta(N) = \Delta(FM^*) &= \Delta(F)\Delta(M^*) = M \dot{\otimes} FM^* + FM^* \dot{\otimes} M^*. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Sei τ der Operator, der die Faktoren des Tensorprodukts vertauscht, $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Unter Benutzung von

$$(\Delta(M^*))^{-1} = \tau(M^+ \dot{\otimes} M^+) \quad (2.70)$$

oder äquivalent als

$$(M^{*i}{}_j \otimes M^{*j}{}_k)(M^{+a}{}_l \otimes M^{+k}{}_a) = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^i{}_l, \quad (2.71)$$

ergibt sich die Komultiplikation für den Translationsanteil zu

$$\Delta(F^i{}_k) = F^i{}_k \otimes \mathbf{1} + M^i{}_a M^{+b}{}_k \otimes F^a{}_b. \quad (2.72)$$

Diese Beziehung läßt sich auf zweierlei Weise interpretieren: Zum einen gibt die Komultiplikation an, wie die Wirkung von Operatoren sich auf Produkte von Argumenten fortsetzt. Insofern ist (2.68) eine Version der Leibniz-Regel für endliche Translationen; infinitesimale Translationen entsprechen der Anwendung des Generators dieser Transformation, und das wäre in diesem Fall der q -deformierte Ableitungsoperator. Andererseits ergibt sich in Vektornotation

$$\Delta(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \dot{\otimes} \mathbf{1} + \boldsymbol{\Lambda} \dot{\otimes} \mathbf{f} . \quad (2.73)$$

Dies zeigt, wie die Komultiplikation die Gruppentransformation widerspiegelt.

Die Antipode ist durch die Matrixinverse festgelegt

$$S(T) = T^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & N^+ \\ 0 & M^+ \end{pmatrix} , \quad (2.74)$$

wobei $N^+ = -iM^{-1}F$. Also gilt

$$\begin{aligned} S(M) &= M^{-1} \\ S(N) &= N^+ = -M^{-1}NM^+ . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Für F folgt

$$S(N) = S(iFM^*) = -iM^{-1}F , \quad (2.76)$$

und unter Verwendung von Indizes und der antimultiplikativen Eigenschaft der Antipoden

$$i S(M^{*j}{}_k) S(F^i{}_j) = -i M^{-1}{}^i{}_a F^a{}_k \quad (2.77)$$

i. e.

$$S(F^i{}_j) = -M^{*b}{}_j M^{-1}{}^i{}_a F^a{}_b . \quad (2.78)$$

Da das Produkt der Matrizen M in der Form $(M \otimes M^+)^{-1}$ auftritt, erhalten wir in Vektornotation

$$S(\mathbf{f}) = -\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{f} . \quad (2.79)$$

Mit der Angabe der Komultiplikation und der Antipoden haben wir die Hopf-Algebra-Struktur dargelegt, die grundlegende Struktur, die bei der Deformation von Gruppen deren Gruppenstruktur ersetzt. Da wir es in unserem Fall aber mit *komplexen* Quantengruppen zu tun haben, ist zusätzlich zu zeigen, daß die Konjugationsstruktur mit der Komultiplikation und der Antipoden verträglich ist. Während sich dies für letztere in natürlicher Weise aus den Matrixoperationen Invertieren (M^{-1}) und Adjungieren (M^+) ergibt, müssen wir für die Komultiplikation zeigen, daß

$$\Delta(\overline{L}) = \overline{\Delta(L)} \quad (2.80)$$

gilt. Wir hatten bereits gefunden

$$\Delta(M^+) = \tau(M^+ \dot{\otimes} M^+) \quad (2.81)$$

und folgern durch Transponieren:

$$\Delta(\overline{M}) = \Delta(M^{+t}) = [\Delta(M^+)]^t = \tau(M^+ \dot{\otimes} M^+)^t = \overline{M} \dot{\otimes} \overline{M} . \quad (2.82)$$

Für den Translationsanteil ergibt sich

$$\Delta(N^+) = -\tau(M^{-1} \dot{\otimes} M^{-1})(M \dot{\otimes} N + N \dot{\otimes} M^*) \tau(M^+ \dot{\otimes} M^+) \quad (2.83)$$

i. e.

$$\begin{aligned} \Delta(N^{+i})_k &= -(M^{-1a}_m \otimes M^{-1i}_a)(M^m_b \otimes N^b_n + N^m_b \otimes M^{*b}_n)(M^{+c}_k \otimes M^{+n}_c) \\ &= -M^{-1a}_m M^m_b M^{+c}_k \otimes M^{-1i}_a N^b_n M^{+n}_c \\ &\quad - M^{-1a}_m N^m_b M^{+c}_k \otimes M^{-1i}_a M^{*b}_n M^{+n}_c \\ &= -M^{+c}_k \otimes (M^{-1} NM^+)_c^i - (M^{-1} NM^+)_a^k \otimes M^{-1i}_a \\ &= M^{+c}_k \otimes N^{+i}_c + N^{+a}_k \otimes M^{-1i}_a , \end{aligned} \quad (2.84)$$

wobei wir bei der letzten Umformung die Identität $N^+ = -M^{-1} NM^+$ benutzt haben.
Das Ergebnis ist

$$\Delta(\overline{N}) = \overline{M} \dot{\otimes} \overline{N} + \overline{N} \dot{\otimes} \overline{M}^* , \quad (2.85)$$

was (2.80) für N zeigt, vgl. (2.68), und Entsprechendes findet man damit für F . Wir haben gezeigt, daß Komultiplikation und Konjugation miteinander verträglich sind. Insgesamt ergibt sich die Struktur einer Hopf-*-Algebra [62].

2.5 \widehat{R} -Matrixrelationen für Quantenebenen

Zur Herleitung von \widehat{R} -Matrixrelationen, die die Vertauschungsrelationen für Koordinaten, Differentiale, Ableitungen etc. beschreiben, benutzen wir die Projektorzerlegung für die quadratischen Teilräume. Die Räume der symmetrischen und antisymmetrischen Koordinaten sind invarianten Unterräume bezüglich Lorentz-Transformationen. Die Orthogonalität ermöglicht es, die symmetrische Projektion in die Spurprojektion P_T , die mit der invarianten Länge in Beziehung steht, und einen spurlos symmetrischen Projektator P_S zu zerlegen. In vier Dimensionen läßt sich auch die antisymmetrische Projektion weiterzerlegen aufgrund der Existenz eines vollständig antisymmetrischen ϵ -Tensors, der die Definition von selbstdualen und anti-selfdualen Unterräumen erlaubt. Die Projektoren sind P_+ und P_- .

Wir verweisen auf [28], wo gezeigt wird, daß diese Struktur unter q -Deformation erhalten bleibt (für die Deformation, die in dieser Arbeit als Fall (II) mit $s = q$ auftritt). Ohne die Projektoren in diesem Abschnitt explizit anzugeben, können wir sie wie folgt charakterisieren: Die Summe aller vier Projektoren ist der Einheitsoperator $\mathbf{1}$, in Koordinaten des quadratischen Unterraums $\mathbf{1}_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j$. Darüberhinaus gibt es einen Vertauschungsoperator $V = P_{symm} - P_{anti}$ ($V_{kl}^{ij} \rightarrow \delta_l^i \delta_k^j$ wenn $q \rightarrow 1$). Der Projektor auf den Spuranteil ist aus der Metrik aufgebaut, während die Selbstdualität durch den ϵ -Tensor gegeben wird.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &= + \quad P_T = \omega^{-2} g \otimes g^{-1} \\
P_{symm} &= + \quad P_S = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + V) - \omega^{-2} g \otimes g^{-1} \\
&\quad + \quad P_+ = \frac{1}{4}(\mathbf{1} - V) + \frac{i}{2q\omega} \epsilon \\
P_{anti} &= + \quad P_- = \frac{1}{4}(\mathbf{1} - V) - \frac{i}{2q\omega} \epsilon ,
\end{aligned} \tag{2.86}$$

wobei $\omega = q + q^{-1}$ und g^{-1} das Inverse der Metrik (2.42). Die verallgemeinerten Objekte haben weiterhin eine Reihe der üblichen Eigenschaften, die aus den Projektoreigenschaften folgen:

$$\begin{aligned}
V^2 &= \mathbf{1} && \text{Vertauschungseigenschaft,} \\
V\epsilon &= -\epsilon = \epsilon V && \text{Antisymmetrie des } \epsilon\text{-Tensors,} \\
\epsilon^2 &= -q^2\omega(\mathbf{1} - V) && \text{Kontraktion über zwei Indizes.}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Wie hängen nun die Projektoren mit der im vorigen Abschnitt hergeleiteten R -Matrix zusammen? In [28] wurde gezeigt, daß zwei Kombinationen der zum Fall (II) gehörenden Projektoren die Yang-Baxter-Gleichung erfüllen und somit als \hat{R} -Matrizen konsistente Quantenalgebren generieren:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_I &= P_S + P_T - q^2 P_+ - q^{-2} P_- , \\
\hat{R}_{II} &= q^{-2} P_S + q^2 P_T - P_+ - P_- .
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Die hergeleitete R -Matrix stimmt mit der zweiten hier angegebenen überein: $\hat{R}^\Lambda = \hat{R}_{II}$. In diesem und in den folgenden Abschnitten werden wir uns auf den Fall (II) beschränken, wenn wir explizite Relationen angeben. Die Vertauschungsrelationen können prinzipiell mit \hat{R}^Λ allein generiert werden, da die Projektoren auf den spurlos-symmetrischen und antisymmetrischen Anteil sowie auf den Spur-Anteil wie folgt angegeben

werden können:

$$\begin{aligned}
 P_S &= \frac{1}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{q\lambda} \hat{R}_{\mathbb{I}} + \frac{q}{\lambda} \hat{R}_{\mathbb{I}}^{-1} \right) \\
 P_T &= \frac{1}{\omega^2} \left(1 + \frac{q}{\lambda} \hat{R}_{\mathbb{I}} - \frac{1}{q\lambda} \hat{R}_{\mathbb{I}}^{-1} \right) \\
 P_A &= \frac{1}{\omega^2} \left((q^2 + q^{-2}) \mathbf{1} - \hat{R}_{\mathbb{I}} - \hat{R}_{\mathbb{I}}^{-1} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Insbesondere

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{\omega^2} \left(-\lambda^2 \mathbf{1} + 2\hat{R}_{\mathbb{I}} + 2\hat{R}_{\mathbb{I}}^{-1} \right) \\
 P_{sym} &= \frac{1}{\omega^2} \left(2\mathbf{1} + \hat{R}_{\mathbb{I}} + \hat{R}_{\mathbb{I}}^{-1} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Um die \hat{R} -Matrixrelation für die symmetrischen Lorentz-Koordinaten zu finden, fordern wir, daß die antisymmetrischen Projektoren verschwinden:

$$\mathbf{1} X_1 X_2 = (P_S + P_T) X_1 X_2 \tag{2.91}$$

i. e.

$$\mathbf{1} X_1 X_2 = \frac{1}{\omega^2} \left(2\mathbf{1} + \hat{R} + \hat{R}^{-1} \right) X_1 X_2 . \tag{2.92}$$

Verwendet man beide R -Matrizen, kann man bequemer schreiben

$$\mathbf{1} X_1 X_2 = \hat{R}_I X_1 X_2 . \tag{2.93}$$

Die Ableitungen erfüllen genau die gleichen Relationen wie die Koordinaten. Dies bedeutet insbesondere, daß Orts- und Impuls-Koordinaten in gleicher Weise deformiert werden. (Diese Symmetrie wird jedoch i. a. bei der Einführung von Realitätsbedingungen gebrochen.) Da die Ableitungen jedoch mit unteren Indizes im folgenden gebraucht werden, summieren wir entsprechend über die Metrik: $\partial_I = g_{IK} \partial^K$. Aufgrund der Eigenschaften der \hat{R} -Matrix ergibt sich

$$\partial_2 \partial_1 = \partial_2 \partial_1 \hat{R}_I . \tag{2.94}$$

Auf die antisymmetrischen Differentiale angewendet, verschwinden die symmetrischen Projektoren

$$\mathbf{1} dX_1 dX_2 = (P_+ + P_-) dX_1 dX_2 = -\hat{R}_{\mathbb{I}} dX_1 dX_2 . \tag{2.95}$$

Die Relationen lauten:

$$\begin{aligned} dA \, dC &= -q^2 dC \, dA - q^3 \lambda \, dA \, dD \\ dB \, dC &= -q^{-2} dC \, dB + q\lambda \, dB \, dD \\ dC \, dD &= -dD \, dC - q\lambda \, dB \, dA \end{aligned} \quad \begin{aligned} dA \, dD &= -dD \, dA \\ dB \, dD &= -dD \, dB \\ dA \, dB &= -dB \, dA . \end{aligned} \quad (2.96)$$

Als weitere Quantenebene führen wir nun die deformierte Algebra der γ -Matrizen ein. Sie sind sicherlich nicht symmetrisch, allerdings braucht der Spurprojektor nicht zu verschwinden. Eine mögliche Definition ist

$$1\gamma_2\gamma_1 = (P_T + P_+ + P_-)\gamma_2\gamma_1 = -\hat{R}_{II}\gamma_2\gamma_1 + q\omega g . \quad (2.97)$$

Hierbei ist die Normierung der γ -Matrizen zu $g_{IJ}\gamma^J\gamma^I = \omega^2$ gewählt. Die Summationsreihenfolge über die Indizes ist vertauscht $\gamma_2\gamma_1$ statt $\gamma_1\gamma_2$. Wir werden im vierten Kapitel sehen, daß dies gerade nötig ist, um einen geeigneten Dirac-Operator zu konstruieren. Die Relationen lauten in der angenommenen Normierung:

$$\begin{aligned} \gamma^A\gamma^B + \gamma^B\gamma^A &= -q^{-1}\omega \\ \gamma^A\gamma^D + \gamma^D\gamma^A &= 0 \\ \gamma^B\gamma^D + \gamma^D\gamma^B &= 0 \\ \gamma^A\gamma^C + q^{-2}\gamma^C\gamma^A &= -q\lambda\gamma^D\gamma^A \\ \gamma^B\gamma^C + q^2\gamma^C\gamma^B &= q^3\lambda\gamma^D\gamma^B \\ \gamma^C\gamma^D + \gamma^D\gamma^C &= q\lambda\gamma^B\gamma^A + q\omega \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$(\gamma^{A,B,D})^2 = 0 \quad (\gamma^C)^2 = -q\lambda\gamma^B\gamma^A . \quad (2.99)$$

Matrixdarstellungen der γ -Matrizen werden in den Kapiteln 3 und 4 angegeben.

2.6 Anhang

2.6.1 Skalierungseigenschaften

Die Vertauschungsrelationen für Quanten-Algebren sind nicht völlig eindeutig, da insbesondere Skalierungen mit Potenzen von q im Grenzfall, der ansonsten für die Definitionen leitend ist, nicht zu identifizieren sind. Untersuchen wir die Skalierungseigenschaften der $SL_q(2)$: Aus dem allgemeinsten Ansatz

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow \alpha a & b \rightarrow \beta b \\ c \rightarrow \gamma c & d \rightarrow \delta d \end{array} \quad (2.100)$$

folgt, daß sich in den Vertauschungsrelationen der Faktor von ad gegenüber bc verändert. Um dies zu verhindern, beschränken wir uns auf $\delta = \beta\gamma/\alpha$. Die Unimodularität führt zur Einschränkung $\gamma = 1/\beta$.

Diese Skalierungsmöglichkeiten erklären die Wahlfreiheit von b_{14} im Fall (II). Fixieren wir $\alpha = 1$ und die Skalierungen von e, f, g, h zu

$$\begin{array}{ll} e \rightarrow \beta e & f \rightarrow f \\ g \rightarrow g & h \rightarrow \beta^{-1}h \end{array}, \quad (2.101)$$

dann verändert diese Transformation b_{14} gerade um den Faktor $1/\beta^2$. In der Definition von A, B, C, D führt diese Transformation zu

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow A & B \rightarrow B \\ C \rightarrow \beta C & D \rightarrow \beta^{-1}D \end{array}. \quad (2.102)$$

2.6.2 Bestimmung der Metrik

Vergleicht man (2.19) und (2.21) für den Fall $q = 1$, so muß die Metrik für beliebiges q eine Deformation von

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{IJ} \quad (2.103)$$

sein. Im Fall (I) ist aus den Vertauschungsrelationen ersichtlich, daß die Kombinationen AB und CD nur mit BA und DC in Verbindung stehen, im Fall (II) kommt D^2 hinzu. Daraus folgt der Ansatz

$$\begin{aligned} CD - q^{-2}t^{-1}AB &= \alpha AB + \beta BA + \gamma CD + \delta DC \\ &= (\gamma + \delta - \beta t q \lambda) CD + (\alpha + \beta) AB \end{aligned} \quad (2.104)$$

also

$$\alpha = -q^{-2}t^{-1} - \beta \quad \delta = 1 - \gamma + \beta tq\lambda . \quad (2.105)$$

Die verbleibende Freiheit, β und γ zu wählen, geht auf die Skalierungsfreiheiten der Algebra zurück. Für die Wahl $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$ erhalten wir (2.37).

Für den Fall (II) entsprechend

$$\begin{aligned} CD - q^{-2}AB &= \alpha AB + \beta BA + \gamma CD + \delta DC + \mu D^2 \\ &= (\gamma + \delta - \beta q\lambda)CD + (\alpha + \beta)AB + (\beta q^{-1}\lambda + \mu)D^2 \end{aligned} \quad (2.106)$$

i. e.

$$\alpha = -q^{-2} - \beta \quad \delta = 1 - \gamma + \beta q\lambda \quad \mu = -\beta q^{-1}\lambda . \quad (2.107)$$

Wählen wir $\beta = q^{-2}\alpha$ und $\gamma = \delta$, erhalten wir (2.42).

2.6.3 Rechenschritte

Wir fügen ein Beispiel an, um die in Abschnitt 2.2 notwendigen Rechnungen zu erläutern. Die Vertauschungsrelationen der Minkowski-Koordinaten folgen aus der Identifikation (2.33) mit den Relationen (2.27) bzw. (2.28). Berechnen wir für den Fall (II) die Relation zwischen A und D :

$$\begin{aligned} qAD &= (e\bar{c} + f\bar{d})(g\bar{c} + h\bar{d}) \\ &= e\bar{c}g\bar{c} + e\bar{c}h\bar{d} + f\bar{d}g\bar{c} + f\bar{d}h\bar{d} . \end{aligned} \quad (2.108)$$

Für diese vier Ausdrücke im einzelnen vertauschen wir erst die mittleren beiden Elemente, dann die ersten und letzten beiden und dann wiederum die mittleren:

$$\begin{aligned} e\bar{c}g\bar{c} &= e(s g\bar{c} + s\lambda h\bar{d})\bar{c} \\ &= qs g\bar{c}\bar{c} + q^{-1}s\lambda eh\bar{d}\bar{c} \\ &= q^2 g\bar{c}e\bar{c} - q\lambda g\bar{d}f\bar{c} + q^{-1}s\lambda(he + \lambda gf)\bar{d}\bar{c} \\ &= q^2 g\bar{c}e\bar{c} - q^{-1}\lambda g\bar{d}f\bar{c} + q\lambda h\bar{d}e\bar{c} \\ \\ e\bar{c}h\bar{d} &= q^{-1}s eh\bar{c}\bar{d} \\ &= q^{-2}s h\bar{d}\bar{c} + q^{-1}s\lambda gf\bar{c}\bar{d} \\ &= h\bar{d}e\bar{c} + q^{-1}\lambda g\bar{d}f\bar{c} \\ \\ f\bar{d}g\bar{c} &= q^{-1}s fg\bar{d}\bar{c} \\ &= s g\bar{f}\bar{c}\bar{d} \\ &= q^2 g\bar{c}f\bar{d} \\ \\ f\bar{d}h\bar{d} &= s fh\bar{d}\bar{d} \\ &= qs h\bar{f}\bar{d}\bar{d} \\ &= q^2 h\bar{d}f\bar{d} . \end{aligned} \quad (2.109)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} AD &= q(g\bar{c}e\bar{c} + h\bar{d}e\bar{c} + g\bar{c}f\bar{d} + h\bar{d}f\bar{d}) \\ &= q(g\bar{c} + h\bar{d})(e\bar{c} + f\bar{d}) \\ &= q^2 DA . \end{aligned} \quad (2.110)$$

Entsprechend berechnen sich die übrigen Relationen. Zur Überprüfung der Ergebnisse wurden die Vertauschungsrelationen auf den Computer-Algebra-Systemen REDUCE und MATHEMATICA implementiert, was erlaubt, jeden Ausdruck in den Variablen in eine eindeutige Form umzuordnen. Hiermit konnte verifiziert werden, daß sich Kombinationen wie z.B. $AD - q^2 DA$ nach Anwendung der Vertauschungsregeln zu Null wegheben.

2.6.4 Probleme der Deformation der Poincaré-Gruppe

Wir wollen hier kurz diskutieren, inwieweit der Twistorraum-Ansatz zur Quantendeformation der Poincaré-Gruppe sich von anderen Ansätzen unterscheidet. In [51] wurde ein allgemeines Schema vorgestellt, wie man zu den meisten bekannten Quantengruppen inhomogene Versionen angeben kann. Dies wurde in [21] aufgenommen und in einen weiteren Kontext gestellt. Der Versuch, die Quantenmatrix T mit einem Translationsvektor x zu einer neuen Quantenmatrix \mathcal{T} zu kombinieren, gelang für orthogonale Gruppen nur unter Hinzunahme eines weiteren algebraischen Elements w :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} wT & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.111)$$

Der Übergang von T zu wT zerstörte allerdings die Unimodularität der Transformation und führte dazu, daß jede Lorentz-Transformation mit einer Skalierung verbunden war.³ Der Grund für das Auftauchen der Skalierungstransformation war die notwendige Angabe von Vertauschungsrelationen zwischen T und x . Sie mußten so gewählt werden, daß die Komultiplikation auf ganz \mathcal{T} ein Algebren-Homomorphismus ist. Die vorhandene Lorentz- R -Matrix wurde zur Definition verwendet:

$$x^i T^j_k = R^{ij}_{lm} T^m_k x^l . \quad (2.112)$$

Nur unter Erweiterung der Algebra um w mit $[w, M] = 0$ und $xw = qwx$ kann die Komultiplikation konsistent auf x angegeben werden.

Vergleichen wir dies mit dem in dieser Arbeit verwendeten Ansatz über Twistor-Mannigfaltigkeiten: Per Konstruktion ist die Komultiplikation konsistent, und insbesondere sind die Vertauschungsrelationen zwischen Lorentz-Transformationen und Translationen in der $SU_{\{q,\epsilon\}}(2,2)$ Quantengruppe enthalten. Jedoch ist die Problematik der Unimodularität der $SL_q(2, \mathbb{C})$ Matrizen in der um die Translationen vergrößerten Algebra ein Anzeichen für das Auftreten von Skalierungen auch in diesem Ansatz.

³Dies rechtfertigt sicherlich die Benennung ‘inhomogene Quantengruppe’ aus [51], die Bezeichnung ‘ q -Poincaré-Gruppe’ in [21] ist jedoch nicht akzeptabel, da es keine invariante algebraische Verallgemeinerung des Minkowski-Abstandes gibt.

Wie jedoch das Beispiel in Abschnitt 2.3 zeigt, können diese vermieden werden. Wie in (2.63), (2.73) und (2.79) ist es möglich, alle Ergebnisse in Vektorform zu übersetzen. Die Vertauschungsrelationen von Λ und f ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \Lambda^{ii'}_{kk'} f^{ll'} &= M^i_k (\epsilon M^* \epsilon)^{i'}_{k'} (NM^+)^l_{l'} \\ &= \sum_{a,b,c=1,2} T^i_k \epsilon^{i'}_a T^{a+2}_{b+2} \epsilon^b_k T^{l+2}_c T^{-1^{c+2}}_{l'+2}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Hieraus läßt sich eine Vertauschungsmatrix ermitteln, die sich aus vier Untermatrizen der R -Matrix (2.16) bilden läßt, aber sich von der, die durch die Vertauschung von zwei Λ entsteht (2.52), unterscheidet (insbesondere durch die Summation über c). Somit stellt sich heraus, daß der in [51] verfolgte Ansatz durchaus zu einer skalierungsfreien Poincaré-Gruppe führen kann, wenn man geeignete Vertauschungsrelationen zwischen M und x annimmt, die allerdings ohne den hier dargestellten Ansatz schwer zu finden sind.

Kapitel 3

Die q -deformierte Lorentz-Lie-Algebra*

Die quantisierte Lie-Gruppe ist mit der quantisierten Lie-Algebra nicht mehr in einfacher Weise über die Exponentialabbildung verbunden. Der Zusammenhang wird durch eine fundamentale Dualität ersetzt. Durch geeignete Wahl der Generatoren ist die Struktur von $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ eine quadratische Algebra, die völlig aus der einfachen $SL_q(2)$ Struktur ableitbar ist. Die R-Matrix und die entsprechenden γ -Matrizen ermöglichen es, Matrixdarstellungen für die Algebra anzugeben.

3.1 Einleitung

Die zur Quanten-Lorentz-Gruppe des Falls (II) von Kapitel 2 gehörige q -deformierte Lorentz-Algebra ist erstmals in [50, 27] für $s = q$ abgeleitet worden. Es wurden Generatoren konstruiert, die eine Wirkung auf die komplexe Quantenebene (2.18) mit $s = q$ der Form $T^i x^j = a^{ij}_{kl} x^k T^l + \alpha^{ij}_n x^n$ aufweisen. Aus der Bedingung, daß diese Relationen für unterschiedliche T^i in Anwendung auf beliebige Monome in den x^i konsistent sind, wurden die möglichen a und α konstruiert. Dies stellt einen klaren kalkulatorischen Zugang dar, der im wesentlichen in einer Überprüfung aller Konsistenzbedingungen durch direktes Durchrechnen bestand. Hieraus ergab sich eine Liste von 21 Relationen für sieben Generatoren, die zwar linear unabhängig, aber, wie wir zeigen werden, als Erzeugendensystem der universellen Einhüllenden der Quanten-Lorentz-Algebra nicht alle unabhängig sind.

In diesem Kapitel geht es darum, die *Struktur* der Quanten-Lorentz-Algebra zu finden und so eine möglichst kanonische Formulierung für sie anzugeben. Insbesondere soll die deformierte universelle einhüllende Algebra $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ als eine *quadratische Algebra* aufgefaßt werden können. Damit wird sie als eine klare mathematische Struktur identifiziert, von der viele Eigenschaften bekannt sind [53]. Alle Vertauschungsrelationen und die Komultiplikation können mit der Quantengruppenstruktur von $SL_q(2)$ identifiziert werden. Eine natürliche Involution wird dadurch in Form von *linearen* Relationen induziert. Darstellungen dieser Algebra in $M(4 \times 4, \mathbb{C})$, die mit der definierenden *R*-Matrix bzw. mit den Spin-Matrizen aus den entsprechenden q -deformierten

*Dieses Kapitel entspricht [49] in überarbeiteter Form.

γ -Matrizen in Zusammenhang stehen, werden hergeleitet. Die erste dieser beiden Darstellungen ist insbesondere treu und kann somit auch zur Definition von $U_q(sl(2, \mathbf{C}))$ dienen.

3.2 Zwei Arten von R -Matrixrelationen

Eine Quantenmatrix M zur Quantengruppe $SL_q(2)$ [38] mit $q \in \mathbf{R}$ und $\lambda = q - q^{-1}$ hat die Form

$$M = \begin{pmatrix} m^1_1 & m^1_2 \\ m^2_1 & m^2_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

mit der Determinantenbedingung

$$\det_q M = m^1_1 m^2_2 - q m^1_2 m^2_1 = 1 \quad (3.2)$$

und genügt den Vertauschungsrelationen

$$\begin{array}{lll} m^1_1 m^1_2 & = & q m^1_2 m^1_1 \\ m^2_1 m^2_2 & = & q m^2_2 m^2_1 \\ m^1_2 m^2_1 & = & m^2_1 m^1_2 \end{array} \quad \begin{array}{lll} m^1_1 m^2_1 & = & q m^2_1 m^1_1 \\ m^1_2 m^2_2 & = & q m^2_2 m^1_2 \\ m^1_1 m^2_2 & = & m^2_2 m^1_1 + \lambda m^1_2 m^2_1 . \end{array} \quad (3.3)$$

Die Komultiplikation wird durch die Matrixmultiplikation generiert

$$\Delta(M) = M \dot{\otimes} M . \quad (3.4)$$

In der Formulierung der Quantendeformation von $SU(2)$ treten zwei Grundstrukturen auf:

- (a) Man geht von einer Quantenmatrix vom Typ (1) aus. Die Vertauschungsrelationen werden durch

$$\hat{R} M M = M M \hat{R} \quad (3.5)$$

mit der \hat{R} -Matrix

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

generiert und die Unitaritätsbedingung

$$M^+ M = 1, \quad \text{i. e.} \quad \overline{m^1_1} = m^2_2 \quad \text{und} \quad \overline{m^1_2} = -q m^2_1 \quad (3.7)$$

gestellt.

(b) Man betrachtet ein Paar unimodularer oberer und unterer Dreiecksmatrizen \mathcal{L}_+ und \mathcal{L}_- mit den Relationen

$$\begin{aligned}\hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_+ &= \mathcal{L}_+\mathcal{L}_+\hat{R} \\ \hat{R}\mathcal{L}_-\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_-\hat{R} \\ \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+\hat{R}\end{aligned}\tag{3.8}$$

und verlangt Unitarität durch die Bedingung

$$(\mathcal{L}_+)^+ = (\mathcal{L}_-)^{-1}.\tag{3.9}$$

Diese Beschreibungen werden im allgemeinen als zueinander duale aufgefaßt [38, 20]. Es zeigt sich jedoch für den Fall komplexer Quantengruppen, daß dies nicht zwangsläufig die Dualität $G_q \leftrightarrow U_q(g)$ von Quantengruppe des Typs (a) und quantisierter Lie-Algebra vom Typ (b) zu sein braucht. Vielmehr stellt sich heraus, daß auch die Quantengruppe teilweise durch Relationen vom Typ (b) beschrieben wird: Die Quantengruppenmatrix A von $SL_q(2, \mathbb{C})$ läßt sich in ein Produkt einer $SU_q(2)$ Quantenmatrix mit einer Dreiecksmatrix zerlegen: $A = M \mathcal{L}$. Dies ist die entsprechende Iwasawa-Zerlegung für die Quantengruppe $SL_q(2, \mathbb{C})$ [35, 55]. Im folgenden werden wir zeigen, daß auch die quantisierte Lie-Algebra neben den Dreiecksmatrizen eine $SU_q(2)$ Matrix enthält.

3.3 Einführung eines neuen Erzeugendensystems der einhüllenden Lie-Algebra

In [50] wurden eine aus sieben Generatoren bestehende Deformation der Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe angegeben und alle Vertauschungsrelationen aufgelistet. Um die Struktur der universellen einhüllenden Algebra der Quanten-Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe zu beschreiben, beginnen wir mit der Beobachtung, daß Kombinationen der Generatoren in der bereits angedeuteten Art und Weise in Quantengruppenmatrizen geschrieben werden können. Daraus ergibt sich eine der Matrixstruktur der Quantengruppen angemesseneres Erzeugendensystem der universellen einhüllenden Algebra aus den Generatoren $(L^+, L^-, \ell, \ell^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ [38, 45]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+ &= \begin{pmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ \lambda L^+ & \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ q\lambda T^+ (\tau^3)^{-\frac{1}{4}} & (\tau^3)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \\
\mathcal{L}_- &= \begin{pmatrix} \ell & -q\lambda L^- \\ 0 & \ell^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{\frac{1}{4}} & -\lambda/q T^- (\tau^3)^{-\frac{1}{4}} \\ 0 & (\tau^3)^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \\
\mathcal{L}_b &= \begin{pmatrix} k & -q\lambda K^1 \\ \lambda K^2 & \tilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^1 (\tau^3)^{\frac{1}{4}} & \lambda S^1 (\tau^3)^{-\frac{1}{4}} \\ \lambda T^2 (\tau^3)^{\frac{1}{4}} & \sigma^2 (\tau^3)^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Insbesondere zeigt die neue Wahl der Generatoren die Struktur einer quadratischen Algebra¹. Wie üblich werden die Analoge der Generatoren der Cartan-Unteralgebra durch Inverse ℓ^{-1} und \tilde{k} ergänzt. Da im deformierten Fall die Generatoren der Transformationen endlichen Verschiebungen, Rotationen etc. entsprechen und damit mit einer diskreten Struktur korrespondieren ($\ell = q^H$ statt H etc.), können sie auch als Quantengruppenmatrizen aufgefaßt werden.

Die Vertauschungsrelationen der q -Lorentz-Algebra werden durch die R -Matrix-Gleichungen (3.8) für die Rotations-Unteralgebra und die folgenden Relationen

$$\hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_b = \mathcal{L}_b\mathcal{L}_b\hat{R} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_b &= \mathcal{L}_b\mathcal{L}_+\hat{R} \\
\hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_b\hat{R}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

gegeben. Während die Deformation der Rotations-Unteralgebra vom Typ (b) ist, nimmt die Unteralgebra, die die Boost enthält, die Form (a) an. Die verbleibenden Relationen werden auf ähnliche Art und Weise gegeben (3.12).

3.4 Die q -Lie-Algebra Relationen der Lorentz-Gruppe

Wir geben im folgenden die expliziten Relationen an und vergleichen sie mit denjenigen in [50]. Für die Rotations-Unteralgebra lässt sich aus (3.3) mit (3.10) ablesen:

$$\begin{aligned}
L^+ \ell &= q \ell L^+ \\
L^- \ell &= q^{-1} \ell L^- \\
[L^+, L^-] &= q^{-1} \lambda^{-1} (\ell^{-2} - \ell^2).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

¹Eine quadratische Algebra auf einem linearen Raum V ist der Quotient der Tensoralgebra $T(V)$ mit einem Ideal $\mathcal{I} \subset V \otimes V$; vgl. z. B. [23, 53]

Mit der Identifikation berechnet sich dies zu

$$\begin{aligned}\tau^3 T^+ &= q^{-4} T^+ \tau^3 \\ \tau^3 T^- &= q^4 T^- \tau^3 \\ T^+ T^- &= q^2 T^- T^+ + q \lambda^{-1} (1 - \tau^3)\end{aligned}\tag{3.14}$$

wie behauptet. Die Relationen zwischen Rotations- und Boost-Generatoren sind

$$\begin{aligned}kL^+ &= q^{-1} L^+ k + q^{-1} \lambda \ell^{-1} K^2 & kL^- &= q^{-1} L^- k + q \lambda \ell K^1 \\ \tilde{k}L^+ &= q L^+ \tilde{k} - \lambda K^2 \ell & \tilde{k}L^- &= q L^- \tilde{k} - \lambda K^1 \ell^{-1} \\ k\ell &= \ell k & \tilde{k}\ell &= \ell \tilde{k} \\ K^1 L^+ &= L^+ K^1 - q^{-1} \lambda^{-1} (\ell^{-1} \tilde{k} - \ell k) & K^1 L^- &= L^- K^1 \\ K^2 L^+ &= L^+ K^2 & K^2 L^- &= L^- K^2 + q^{-1} \lambda^{-1} (k \ell^{-1} - \ell \tilde{k}) \\ K^1 \ell &= q^{-1} \ell K^1 & K^2 \ell &= q \ell K^2\end{aligned}\tag{3.15}$$

und entsprechen

$$\begin{aligned}\tau^1 T^+ &= T^+ \tau^1 + \lambda T^2 & \tau^1 T^- &= q^{-2} T^- \tau^1 - \lambda S^1 \\ \sigma^2 T^+ &= T^+ \sigma^2 - q^2 \lambda \tau^3 T^2 & \sigma^2 T^- &= q^2 T^- \sigma^2 + q^2 \lambda S^1 \\ \tau^1 \tau^3 &= \tau^3 \tau^1 & \sigma^2 \tau^3 &= \tau^3 \sigma^2 \\ S^1 T^+ &= q^{-2} T^+ S^1 - q^{-2} \lambda^{-1} (\tau^3 \tau^1 - \sigma^2) & S^1 T^- &= T^- S^1 \\ T^2 T^+ &= q^2 T^+ T^2 & T^2 T^- &= T^- T^2 + \lambda^{-1} (\tau^1 - \sigma^2) \\ S^1 \tau^3 &= q^{-4} \tau^3 S^1 & T^2 \tau^3 &= q^4 \tau^3 T^2.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Für die Unterlagebra, die die Boosts enthält, finden wir

$$\begin{aligned}kK^1 &= q K^1 k & kK^2 &= q K^2 k \\ \tilde{k}K^1 &= q^{-1} K^1 \tilde{k} & \tilde{k}K^2 &= q^{-1} K^2 \tilde{k} \\ K^1 K^2 &= K^2 K^1 & k\tilde{k} &= \tilde{k}k - q \lambda^3 K^1 K^2,\end{aligned}\tag{3.17}$$

und diese Relationen korrespondieren mit

$$\begin{aligned}\tau^1 S^1 &= S^1 \tau^1 & \tau^1 T^2 &= q^2 T^2 \tau^1 \\ \sigma^2 S^1 &= S^1 \sigma^2 & \sigma^2 T^2 &= q^{-2} T^2 \sigma^2 \\ S^1 T^2 &= T^2 S^1 & \tau^1 \sigma^2 &= \sigma^2 \tau^1 + q \lambda^3 S^1 T^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Die Bedingung der Unimodularität von \mathcal{L}_b reduziert die Anzahl voneinander unabhängiger Generatoren der Quanten-Lorentz-gruppe auf sechs (vgl. dazu auch [45]).

$$\begin{aligned}1 = \det_q \mathcal{L}_b &= k\tilde{k} + q \lambda^2 K^1 K^2 \\ &= \tau^1 \sigma^2 - q^2 \lambda^2 S^1 T^2.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Diese Relation kann in genau der gleichen Weise dazu benutzt werden, \tilde{k} zu eliminieren, wie die Relation $\ell\ell^{-1} = \mathbf{1}$, um ℓ^{-1} zu ersetzen. Zur Erklärung der Deformationsstruktur und für Berechnungen erweist sich also die rein quadratische Algebra $(L^+, L^-, \ell, \ell^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ gegenüber der Algebra $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$ von Vorteil; die universelle Einhüllende ist selbstverständlich identisch.

3.5 Die Komultiplikation der q -Lorentz-Generatoren

Die Komultiplikation wird durch Matrizenmultiplikation generiert (3.4). Für den Rotationssektor ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta(\ell) &= \ell \otimes \ell \\ \Delta(L^+) &= L^+ \otimes \ell^{-1} + \ell \otimes L^+ \\ \Delta(L^-) &= L^- \otimes \ell + \ell^{-1} \otimes L^-\end{aligned}\tag{3.20}$$

i. e.

$$\begin{aligned}\Delta(\tau^3) &= \tau^3 \otimes \tau^3 \\ \Delta(T^+) &= T^+ \otimes \mathbf{1} + (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \otimes T^+ \\ \Delta(T^-) &= T^- \otimes \mathbf{1} + (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \otimes T^-\end{aligned}\tag{3.21}$$

und für den Boostsektor findet man

$$\begin{aligned}\Delta(k) &= k \otimes k - q\lambda^2 K^1 \otimes K^2 \\ \Delta(\tilde{k}) &= \tilde{k} \otimes \tilde{k} - q\lambda^2 K^2 \otimes K^1 \\ \Delta(K^1) &= K^1 \otimes \tilde{k} + k \otimes K^1 \\ \Delta(K^2) &= K^2 \otimes k + \tilde{k} \otimes K^2,\end{aligned}\tag{3.22}$$

dies entspricht

$$\begin{aligned}\Delta(\tau^1) &= \tau^1 \otimes \tau^1 + \lambda^2 S^1 (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \otimes T^2 \\ \Delta(\sigma^2) &= \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \lambda^2 T^2 (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \otimes S^1 \\ \Delta(S^1) &= S^1 \otimes \sigma^2 + (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \tau^1 \otimes S^1 \\ \Delta(T^2) &= T^2 \otimes \tau^1 + (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \sigma^2 \otimes T^2.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Im Vergleich kann festgestellt werden, daß die Komultiplikation den linearen Raum V der neuen Generatoren auf den quadratischen Teil seiner Tensoralgebra abbildet: $\Delta|_V : V \rightarrow V \otimes V$.

3.6 Die Realitätsstruktur der q -Lie-Algebra

Die Involution auf den Generatoren der deformierten Lie-Algebra folgt aus den Unitätsrelationen der Strukturen: Für \mathcal{L}_+ und \mathcal{L}_- sind sie vom Typ (a) und für \mathcal{L}_b vom Typ (b).

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_+)^+ &= (\mathcal{L}_-)^{-1} : \quad \begin{pmatrix} \overline{\ell^{-1}} & \lambda \overline{L^+} \\ 0 & \overline{\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell^{-1} & \lambda L^- \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \\ (\mathcal{L}_b)^+ &= (\mathcal{L}_b)^{-1} : \quad \begin{pmatrix} \overline{k} & \lambda \overline{K^2} \\ -q\lambda \overline{K^1} & \overline{\tilde{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{k} & \lambda K^1 \\ -q\lambda K^2 & k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

i. e.

$$\begin{array}{lll} \overline{\ell} & = & \ell \\ \overline{k} & = & \tilde{k} \\ \overline{L^+} & = & L^- \\ \overline{K^1} & = & K^2 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ll} \overline{T^\pm} & = q^{\mp 2} T^\mp \\ \overline{\tau^3} & = \tau^3 \\ \overline{T^2} & = -(\tau^3)^{-\frac{1}{2}} S^1 \\ \overline{S^1} & = -q^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}} T^2 \\ \overline{\tau^1} & = (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \sigma^2 \\ \overline{\sigma^2} & = (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \tau^1. \end{array} \quad (3.25)$$

Somit erkennen wir wiederum eine einfache Struktur für die vorgeschlagene Wahl der Generatoren: Die Konjugation ist eine Involution auf dem linearen Raum der Generatoren. Aufgrund der Konstruktion ist sichergestellt, daß die Konjugation kompatibel mit den Relationen (3.13), (3.15) und (3.17) ist.

Die Bedingungen $\mathcal{I} \subset V \otimes V$, $\Delta(V) \subset V \otimes V$ und $\overline{V} = V$ zeichnen die hier gewählte Basis gegenüber anderen aus.

3.7 Die Dualität von q -Lie-Algebra und Quantengruppe; die q -adjungierte Darstellung

Die Quantisierung von Lie-Algebren ergab sich zuerst im Umfeld der Diskussion integrierbarer Modelle und der quasi inversen Streumethode (Arbeiten von Kulish, Reshetikhin, Sklyanin). Danach tauchten unabhängig voneinander Deformationen von Matrixgruppen auf (Arbeiten von Faddeev, Takhtajan, Woronowicz). Vgl. dazu die Diskussionen in [12, 38, 20]. Im Leningrader Zugang mit R -Matrizen ist die enge Verbindung dieser beiden Strukturen offenkundig: Die Quantisierung von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

sind dual zueinander im folgenden Sinne [38, 20]:

$$\begin{aligned} \langle .|.\rangle : G_q \otimes U_q(g) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \langle \mathbf{L}^\pm | \mathbf{T} \rangle &= \mathbf{R}^\pm \end{aligned} \tag{3.26}$$

$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^- = P\mathbf{R}^{-1}P$. In unserem Falle ist \mathbf{T} die Quantenmatrix der Lorentz-Gruppe, d. h. der Vektordarstellung der $SL_q(2, \mathbf{C})$, und \mathbf{L}^\pm zu bestimmende Matrizen, die die Generatoren der quantisierten Lie-Algebra enthalten. Die R -Matrix der Lorentz-Gruppe \mathbf{R} ergibt sich, wie in Abschnitt 2.2 bereits ausgeführt, aus der R -Matrix von $SL_q(2)$ [5, 45]: $\mathbf{R}_{1234} = R_{23}R_{13}R_{24}R_{14}^{-1}$.² Die Dualitätsbeziehung (3.26) liefert eine Darstellung der quantisierten Lorentz-Algebra als Untermatrizen der R -Matrix der Lorentz-Gruppe. Diese Darstellung wird oft ‘fundamentale’ oder ‘adjungierte’ Darstellung der q -deformierten Lie-Algebra genannt, da man die R -Matrix als eine Matrix von Strukturkonstanten der deformierten Lie-Algebra verstehen kann; im Grenzfall $q \rightarrow 1$ lassen sich diese aus der R -Matrix rekonstruieren.

Bezüglich der Quantengruppe $SL_q(2, \mathbf{C})$ transformiert ein Vektor $X^{ab'}$ mit $M \times \overline{M}$ ($(A \times B)^{ij}_{kl} = A^i{}_k B^j{}_l$). Als eine Folge findet man die Zerlegung der \mathbf{L}^\pm -Matrizen [45]:

$$\mathcal{L}_{21}^+ = \mathcal{L}_+ \times \mathcal{L}_b , \quad \mathcal{L}_{21}^- = \mathcal{L}_b \times \mathcal{L}_- . \tag{3.27}$$

Die Relationen (3.8), (3.11), und (3.12) bilden zusammengenommen die entsprechende Relation (3.8) für \mathbf{R} und \mathbf{L}^\pm . Auswertung der Dualität mit der expliziten Form der R -Matrix der Lorentz-Gruppe ergibt 16 nichtverschwindende Elemente von \mathcal{L}^+ und \mathcal{L}^- . Wie im Anhang 3.9 gezeigt, ist es möglich, die entsprechenden Faktoren zu bestimmen, und man findet damit die ‘ q -adjungierte’ Darstellung der quantisierten Lorentz-Gruppe,

²Ausgehend von einer anderen R -Matrix wird die hier skizzierte Methode, die quantisierte Lie-Algebra abzuleiten, in [11] angewendet. Dies führt allerdings zu einer komplizierten Struktur mit Potenzreihen in den Generatoren. Der Zusammenhang mit den hier diskutierten Algebren ist nicht offensichtlich.

i. e. der Vektordarstellung der $SL_q(2, \mathbf{C})$:

$$\begin{aligned}
L^+ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \end{pmatrix} & L^- &= \begin{pmatrix} \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
\ell &= \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \end{pmatrix} & \ell^{-1} &= \begin{pmatrix} q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} \\
K^1 &= \begin{pmatrix} \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & K^2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
k &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} & \tilde{k} &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Dies zeigt insbesondere, daß die Algebra $(L^+, L^-, \ell, \ell^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ vom R -Matrix-Standpunkt aus die kanonische Wahl darstellt. Insbesondere ist diese Darstellung treu und kann als ein Ausgangspunkt für die Definition dieser quantisierten Lie-Algebra $U_q(sl(2, \mathbf{C}))$ benutzt werden, so wie dies für die üblichen nicht-komplexen Quantengruppen gemacht wird [38]. Auch zeigt diese Analyse, daß die in der Literatur angegebenen Deformationen [5, 35, 50] von Gruppe und Algebra der Lorentz-Symmetrie die zueinandergehörigen sind, d.h. daß sie im oben angegebenen Sinne dual sind. Zur Frage der allgemeinen Darstellungen der q -deformierten Lorentz-Gruppe und -Algebra wird auf die Literatur verwiesen [37, 55, 34].

3.8 Eine Darstellung der Lorentz-Algebra im Spinorraum

Felder, die Spin tragen, werden üblicherweise als mehrkomponentige Spinoren beschrieben. Durch die oben angegebene Vektordarstellung kann nur ganzzahliger Spin realisiert werden. Die Wirkung von Lorentz-Transformationen auf dem Spinorraum kann aus den beiden zweidimensionalen Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$ konstruiert werden. Die Dirac-Darstellung ist die Summe dieser beiden. Sie kann im quadratischen Teil der assoziierten Ciford-Algebra der quantisierten Lorentz-Gruppe gefunden werden [48].

Mit $\omega = q + q^{-1}$ ergibt sich mit der in Abschnitt 2.5 geschilderten Struktur

$$\sigma^{IJ} = \frac{1}{2}[\gamma^J, \gamma^I]_V = \gamma^J \gamma^I + \frac{q}{\omega} g^{IJ} \quad g = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -q\lambda & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Hierbei ist V der in (2.83) eingeführte Vertauschungsoperator zu \mathbf{R} mit der Eigenschaft, daß die σ^{IJ} q -antisymmetrisch sind, i. e. $V\sigma = -\sigma$.

In Vorgriff auf die Diskussion in Abschnitt 4.3 sei bemerkt, daß man die q -deformierten γ -Matrizen am einfachsten durch ihre Identifikation mit den üblichen γ -Matrizen verstehen kann:

$$\begin{aligned} \gamma^A &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \frac{1}{2q} (\gamma^1 - i\gamma^2) \\ \gamma^B &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \frac{q}{2} (\gamma^1 + i\gamma^2) \\ \gamma^C &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \left(\frac{1}{2}(q^2 \gamma^0 + \gamma^3) + \frac{i}{2}(q^2 - 1)\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \right) \\ \gamma^D &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \frac{1}{2} (\gamma^0 - \gamma^3) . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dies führt zu einer Darstellung der in [27] angegebenen chiralen Generatoren

$$\begin{aligned} M^+ &\mapsto q^{-1} \sigma^{BD} & M^- &\mapsto q^{-1} \sigma^{AC} \\ M^3 &\mapsto -q \sigma^{AB} + q^{-1} \sigma^{CD} & N^3 &\mapsto q^{-1} (\sigma^{AB} + \sigma^{CD}) \\ N^+ &\mapsto q \sigma^{AD} & N^- &\mapsto -q^{-3} \sigma^{CB}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

die die chirale q -Lorentz-Algebra erfüllen

$$\begin{aligned} q^2 M^3 M^+ - q^{-2} M^+ M^3 &= \omega M^+ \\ q^{-1} M^+ M^- - q M^- M^+ &= M^3 \\ q^{-2} M^3 M^- - q^2 M^- M^3 &= -\omega M^- \\ q^{-2} N^3 N^+ - q^2 N^+ N^3 &= \omega N^- \\ q N^+ N^- - q^{-1} N^- N^+ &= N^3 \\ q^2 N^3 N^- - q^{-2} N^- N^3 &= -\omega N^+ \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} q^{-1} N^\pm M^\pm - q M^\pm N^\pm &= 0 \\ q N^\pm M^\mp - q^{-1} M^\mp N^\pm &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$[M^\pm, N^3] = 0 \quad [N^\pm, M^3] = 0 \quad [M^3, N^3] = 0.$$

Der Zusammenhang der sieben Generatoren $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$ mit den sechs chiralen ergibt sich zu

$$\begin{aligned} T^+ &= M^+ + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1} N^+ \\ T^- &= M^- + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1} N^- \\ \tau^3 &= (1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1} \\ \tau^1 &= (1 - \lambda M^3)^{-1/2} \\ \sigma^2 &= (1 - \lambda M^3)^{1/2}[1 - q\lambda^2(1 + \lambda N^3)^{-1} N^- M^+] \\ T^2 &= q^{-1}(1 - \lambda M^3)^{-1/2} M^+ \\ S^1 &= -(1 - \lambda M^3)^{1/2}(1 + \lambda N^3)^{-1} N^- \end{aligned} \tag{3.34}$$

Damit kann nun die $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ Darstellung der von uns betrachteten Generatoren angegeben werden. Unter Benutzung von (3.31) und einer chiralen Darstellung der üblichen γ -Matrizen, beispielsweise ³ $\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, $\gamma^1 = \begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}$, $\gamma^2 = \begin{pmatrix} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{pmatrix}$, $\gamma^3 = \begin{pmatrix} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \end{pmatrix}$, erhält man

$$\begin{aligned} \tau^3 &= \begin{pmatrix} q^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q^{-2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & q^2 \end{pmatrix} \\ T^+ &= \begin{pmatrix} & & & \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & -q^{-1} \\ & & & \cdot \end{pmatrix} \quad T^- = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & -q & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ S^1 &= \begin{pmatrix} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad T^2 = \begin{pmatrix} & & & \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \end{pmatrix} \\ \tau^1 &= \begin{pmatrix} q^{-1} & & & \\ & q & & \\ & & 1 & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} q & & & \\ & \ddots & & \\ & & q^{-1} & \\ & & & 1 \\ & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Mit der Identifikation (3.10) ergibt sich die Spinordarstellung für die neuen Generatoren

³Diese Wahl hat ungebräuchliche Vorzeichen der Matrizen γ^2 und γ^3 , um die Darstellung der Generatoren mit der in [50] konstruierten Wirkung der Generatoren auf Spinoren übereinstimmen zu lassen. In Kapitel 4 wird eine gebräuchlichere Wahl getroffen.

zu

$$\begin{aligned}
L^+ &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & L^- &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
\ell &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} & \ell^{-1} &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \\
K^1 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix} & K^2 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
k &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} & \sigma^2 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Darstellungen für beliebigen höheren Spin folgen unter Benutzung der Komultiplikation und q -symmetrisierter Spinoren.

Zum Abschluß dieses Kapitels diskutieren wir die Realisierung der Konjugation auf dieser Darstellung. Ein Dirac-Spinor ist vom Typ $\psi^t = (x, y, -q^{1/2}\bar{y}, q^{-1/2}\bar{x})$, wobei x und y die komplexe Quantenebene [50] aufspannen. Mit Hilfe der Spinor-Metrik ϵ kann die Involution wie folgt gegeben werden:

$$\psi^* = S\psi, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ -q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Auf der Matrix-Darstellung finden wir somit für einen Generator L in der Dirac-Darstellung

$$L^+ = (\bar{L})^t = S L S^{-1}. \tag{3.38}$$

Dieses stimmt mit den (3.25) überein.

3.9 Anhang

Bestimmung der q -adjungierten Darstellung

Aus der Dualität (3.26) ergeben sich mit der R -Matrix die folgenden Darstellungen:

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{L}_{+k}^i)^a{}_b | \mathbf{T} \rangle &= \mathbf{R}^{ai}{}_{bk} \\ \langle (\mathbf{L}_{-k}^i)^a{}_b | \mathbf{T} \rangle &= (\mathbf{R}^{-1})^{ia}{}_{kb}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Zum Ablesen der Darstellungsmatrizen geben wir die R -Matrix in der Basis (11, 12, 13, ..., 44) an:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} q & . \\ . & q^{-1} & . \\ . & . & q & . & . & -q\lambda & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & q^{-1} & . & . & -q^{-1}\lambda & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & \lambda & . & . & q & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & q & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \lambda & . & . & -\lambda^2 & q^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & q^{-1}\lambda & \lambda & . & -\lambda^2 & . & . & . & q^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \lambda & . & . & -\lambda^2 & . & . & . & q^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & q\lambda & . & . & -q^{-1}\lambda^2 & . & . & . & . & q & . & -q\lambda & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & q^{-1}\lambda^2 & . & . & q\lambda - \lambda^3/q & q^{-2}\lambda & . & . & q^{-2}\lambda & . & . & q^{-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \lambda & . & . & . & . & . & . & . & q & . & . & . & . & q & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & q^{-1}\lambda & . & . & . & . & . & . & . & \lambda & . & -\lambda^2 & q^{-1} & . & . & . & q \\ . & q \end{array} \right] \tag{3.40}$$

Im einzelnen erhält man:

$$\begin{aligned}L_{-1}^1 = L_{+2}^2 &= \begin{pmatrix} q^{-1} & . & . & . \\ . & q & . & . \\ . & -\lambda^2 & q^{-1} & . \\ . & . & . & q \end{pmatrix} & L_{-2}^2 = L_{+4}^4 &= \begin{pmatrix} q^{-1} & . & . & . \\ . & q^{-1} & . & . \\ . & . & q & . \\ . & . & . & q \end{pmatrix} \\ L_{-3}^3 = L_{+1}^1 &= \begin{pmatrix} q & . & . & . \\ . & q & . & . \\ . & -\lambda^2 & q^{-1} & . \\ . & . & . & q^{-1} \end{pmatrix} & L_{-4}^4 = L_{+3}^3 &= \begin{pmatrix} q & . & . & . \\ . & q^{-1} & . & . \\ . & . & q & . \\ . & . & . & q^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
L_{-2}^1 = -q^{-1} L_{+4}^2 &= \lambda \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & L_{-4}^3 = q L_{+3}^1 &= \lambda \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
L_{-1}^2 = -q L_{+2}^4 &= -\lambda \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & L_{-3}^4 = -q^{-1} L_{+1}^3 &= -\lambda \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
L_{-1}^3 &= -\lambda \begin{pmatrix} \cdot & q & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & q(q^2-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & L_{-2}^4 &= -\lambda \begin{pmatrix} \cdot & q & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
L_{-1}^4 &= \lambda^2 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & L_{-2}^3 &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \\
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
L_{+2}^1 &= \lambda \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1}(2-q^{-2}) & q^{-2} & \cdot \end{pmatrix} & L_{+4}^3 &= \lambda \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & 1 & \cdot \end{pmatrix} \\
L_{+4}^1 &= \lambda^2 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & L_{+2}^3 &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \\
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Für die Quantengruppe $SO_q(4)$ ist bekannt, daß sie im üblichen Sinne isomorph ist zum Produkt zweier unabhängiger $SU_q(2)$. Entsprechend ergibt sich

$$|T\rangle = |t\rangle |\tilde{t}\rangle, \quad \langle L^\pm| = \langle \tilde{l}^\pm| \langle l^\pm|, \tag{3.45}$$

und

$$\langle L^\pm|T\rangle = \langle \tilde{l}^\pm| \langle l^\pm|t\rangle |\tilde{t}\rangle = R^\pm \times R^\pm = \mathcal{R}^\pm. \tag{3.46}$$

Dies legt es nahe, auch bei der Deformation der Lorentz-Gruppe nach einer Produktstruktur zu suchen [45]. Am einfachsten ist es bei den Generatoren der Diagonalen:

Man sieht, daß L_{-1}^1 und L_{-3}^3 ebenso wie L_{-2}^2 und L_{-4}^4 die gleiche Eintragsstruktur haben und sich auf charakteristische Weise unterscheiden, so daß man findet

$$\begin{pmatrix} q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

und

$$\begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

oder

$$L_{-1}^1 = \ell^{-1} \tilde{k} \quad \text{und} \quad L_{-3}^3 = \ell \tilde{k} \quad (3.49)$$

etc. Entsprechend der Struktur (3.27) kann man aus den bekannten Faktoren andere berechnen und kommt so zur vollständigen Liste der acht Generatoren (3.28).

Kapitel 4

Die q -deformierte Dirac-Gleichung

Die q -deformierten Dirac-Matrizen werden aus den Eigenschaften des Dirac-Operators hergeleitet. In der chiralen Basis nimmt der Dirac-Operator eine einfache Gestalt an, die zu Lösungen im Ruhesystem führen. Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Lorentz-Transformation. Unter Hinzunahme der Darstellungstheorie der Quanten-Poincaré-Algebra ohne Spin ist eine Beschreibung freier Spin-1/2-Teilchen in quantisierter Raum-Zeit möglich.

4.1 Die Problemstellung

Nachdem wir mögliche Quantisierungen der Raum-Zeit-Struktur diskutiert haben, soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, daß dieser mathematische Rahmen auf natürliche Art und Weise die Beschreibung physikalischer Systeme erlaubt. Als Beispiel dient uns die Diracsche Beschreibung von Elektronen. Wir führen dieses Programm für die bekannte Deformation des Falls (II) durch und beschränken uns auf freie Teilchen.

Die zwei wesentlichen Grundprinzipien jedes quantenmechanischen Systems sind nach Wigner ihre Beschreibbarkeit auf einer linearen Mannigfaltigkeit und die Existenz eines unitären Skalarprodukts¹. Diese Grundprinzipien wollen wir auch für die q -deformierte Theorie übernehmen. Die q -deformierte Energie-Impulsbeziehung $p^2 = m^2$ führt zur entsprechenden Klein-Gordon-Gleichung, da das Impulsquadrat eine zentrale Größe in der nichtkommutativen Algebra ist. Um eine q -Dirac-Gleichung zu finden, fragen wir in Anlehnung an Diracs Ausgangspunkt nach der Möglichkeit einer im Impuls linearen Wellengleichung mit Hilfe geeigneter γ -Matrizen, die die q -Klein-Gordon-Gleichung impliziert [9] (vgl. auch [10, 60, 2, 26]).

¹Wigner [59] schreibt in der Einleitung seiner berühmten Arbeit von 1937: “It is perhaps the most fundamental principle of Quantum Mechanics that the system of states forms a *linear manifold*, in which a unitary *scalar product* is defined...”.

4.2 Die q -Dirac-Algebra

Wir verwenden die Vertauschungsrelationen für Vierervektoren des Falls (II) aus Kapitel 2 (2.40) für die Impulskomponenten $p^I (= i\partial^I)$. In der Konvention von [35, 5, 50] (mit $q \leftrightarrow 1/q$ im Vergleich zu Kapitel 2) ist die Koordinatenalgebra des Impulses:

$$\begin{aligned} p^A p^B &= p^B p^A - q^{-1} \lambda p^C p^D + q \lambda (p^D)^2 & p^A p^C &= p^C p^A + q \lambda p^A p^D \\ p^A p^D &= q^{-2} p^D p^A & p^B p^C &= p^C p^B - q^{-1} \lambda p^B p^D \\ p^B p^D &= q^2 p^D p^B & p^C p^D &= p^D p^C. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Metrik ist in diesem Fall

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -q^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -q\lambda \end{pmatrix}_{IJ}. \tag{4.2}$$

Damit ergibt sich das Impulsquadrat, i. e. der Klein-Gordon-Operator im Impulsraum, zu

$$p^2 = g_{IJ} p^I p^J = \frac{\omega}{q} (p^C p^D - q^2 p^A p^B). \tag{4.3}$$

Entsprechend den Grundprinzipien der Quantenmechanik fordern wir eine lineare Konjugationsstruktur auf den Ableitungen und nehmen eine kompliziertere und u. U. nicht-lineare für die Ortskoordinaten des Minkowski-Raumes in Kauf: [58]

$$\begin{array}{rcl} \overline{p^A} &= p^B & \overline{p_A} &= q^2 p_B \\ \overline{p^B} &= p^A & \overline{p_B} &= q^{-2} p_A \\ \overline{p^C} &= p^C & \overline{p_C} &= p_C \\ \overline{p^D} &= p^D & \overline{p_D} &= p_D. \end{array} \tag{4.4}$$

Die Algebra der q -deformierten Dirac-Matrizen folgt aus der Definition des q -Dirac-Operators

$$\not{p} := \gamma^I p_I = g_{IJ} \gamma^I p^J \tag{4.5}$$

und der Forderung, daß sich dieser Operator zum Impulsquadrat iteriert:

$$\not{p} \cdot \not{p} = p^2. \tag{4.6}$$

Die q -deformierten Dirac-Matrizen betrachten wir zunächst als Zahlenmatrizen, die Linearkombinationen von Zuständen vermitteln. Unter Benutzung von (4.1) zum Ordnen

in bezüglich der Impuls-Algebra linear unabhängige Kombinationen erhält man

$$\begin{aligned}
\gamma^I \cdot \gamma^J &= \left[-q^2 \gamma^A p^B - \gamma^B p^A + \gamma^C p^D + \gamma^D (p^C - q \lambda p^D) \right]^2 \\
&= (p^A)^2 q^{-4} (\gamma^B)^2 \\
&+ (p^B)^2 (\gamma^A)^2 \\
&+ (p^C)^2 (\gamma^D)^2 \\
&+ (p^D)^2 (\gamma^C)^2 \\
&+ p^A p^B q^2 (\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A) \\
&+ p^A p^C (\gamma^B \gamma^D + \gamma^D \gamma^B) \\
&+ p^A p^D (\gamma^B \gamma^C + q^2 \gamma^C \gamma^B - q^3 \lambda \gamma^D \gamma^B) \\
&+ p^B p^C (\gamma^A \gamma^D + \gamma^D \gamma^A) \\
&+ p^B p^D (\gamma^A \gamma^C + q^{-2} \gamma^C \gamma^A + q \lambda \gamma^D \gamma^A) \\
&+ p^C p^D (\gamma^C \gamma^D + \gamma^D \gamma^C - q \lambda \gamma^B \gamma^A).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Hieraus kann man mit Hilfe von (4.3) und (4.6) die Vertauschungsrelationen für die q -deformierten γ -Matrizen ablesen:

$$\begin{aligned}
\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A &= -\omega/q \\
\gamma^A \gamma^D + \gamma^D \gamma^A &= 0 \\
\gamma^B \gamma^D + \gamma^D \gamma^B &= 0 \\
\gamma^A \gamma^C + q^{-2} \gamma^C \gamma^A &= -q \lambda \gamma^D \gamma^A \\
\gamma^B \gamma^C + q^2 \gamma^C \gamma^B &= q^3 \lambda \gamma^D \gamma^B \\
\gamma^C \gamma^D + \gamma^D \gamma^C &= q \lambda \gamma^B \gamma^A + q \omega
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$(\gamma^{A,B,D})^2 = 0 \quad (\gamma^C)^2 = -q \lambda \gamma^B \gamma^A.$$

Dies sind die gleichen Relationen wie die in (2.95) mit einer R -Matrix abgeleiteten. Kontraktion mit der Metrik liefert nur in einem Fall eine zur Einheitsmatrix proportionale Größe:

$$g_{IJ} \gamma^I \gamma^J = \omega^2 \mathbf{1}. \tag{4.9}$$

Damit ist die in Kapitel 2 angegebene umgekehrte Summationsreihenfolge für die γ -Matrizen eine Folge der Forderung an den q -Dirac-Operator, sich zum Impulsquadrat zu iterieren; das entspricht gerade dem Zusammenhang von Dirac- und Klein-Gordon-Gleichung. Die q -deformierte Clifford-Algebra ist interessanterweise weiterhin rein quadratisch und hat 16 Basiselemente. Daraus folgt, daß man sie wie im undefinierten Fall mit vierdimensionalen Matrizen identifizieren kann: Verwenden wir die bekannten undefinierten γ -Matrizen

$$\begin{aligned}
(\gamma^0)^2 &= 1, \quad (\gamma^{1,2,3})^2 = -1, \\
\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i &= 0 \quad (i \neq j).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

so kann man die q -deformierte Dirac-Algebra für Quantengruppen durch die folgenden vier Kombinationen, die von einem Parameter q abhängen, einführen:

$$\begin{aligned}\gamma^A &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \frac{1}{2q} (\gamma^1 - i\gamma^2) \\ \gamma^B &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \frac{q}{2} (\gamma^1 + i\gamma^2) \\ \gamma^C &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \left(\frac{1}{2}(q^2 \gamma^0 + \gamma^3) + \frac{i}{2}(q^2 - 1)\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \right) \\ \gamma^D &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \frac{1}{2} (\gamma^0 - \gamma^3).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Für $q = 1$ sind dies gerade ‘Lichtkegel-Koordinaten’, für $q \neq 1$ bekommt γ^C einen zusätzlichen Anteil von dritter Ordnung aus der Clifford-Algebra. Es ergeben sich die Relationen (4.8). Dies ist die entsprechende Clifford-Algebra zur q -Deformation des Minkowski-Raumes [4, 50, 28]. Aufgrund der Identifikation der deformierten mit der undeformierten Algebra ist die q -Deformation eine Art von Basiswechsel in der Clifford-Algebra; die Graduierung der Algebren hingegen ist unterschiedlich, und damit ist die Deformation nichttrivial. Benutzt man diese Identifikation als Einführung der Dirac-Quantenebene, so ist klar, daß die Relationen (4.8) eine konsistente Relationenmenge darstellen.

4.3 Konjugation und Dirac-Operator

Mit den Beziehungen $\gamma^{0+} = \gamma^0$, $\gamma^{k+} = -\gamma^k$ kann die hermitische Adjungierte der $\gamma^A \dots \gamma^D$ berechnet werden. Sie sind jedoch nicht mehr als lineare Kombinationen der $\gamma^A \dots \gamma^D$ darstellbar. Es gibt ein Element η in der Clifford-Algebra, das insbesondere das weiter unten eingeführte Skalarprodukt charakterisiert, so daß die folgenden linearen Konjugationsregeln gelten:

$$\begin{aligned}(\eta\gamma^A)^+ &= q^{-2} \eta\gamma^B & (\eta\gamma^B)^+ &= q^2 \eta\gamma^A \\ (\eta\gamma^C)^+ &= \eta\gamma^D & (\eta\gamma^D)^+ &= \eta\gamma^C.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Mit der Identifikation (4.13) läßt sich η mit dem undeformierten γ^0 identifizieren, das jedoch in der neuen Clifford-Algebra ein recht kompliziertes Element ist:

$$\eta = \gamma^0 = \gamma^C + (1 - q\lambda)\gamma^D + \frac{\lambda}{\omega} \gamma^A\gamma^B\gamma^C - q^2 \frac{\lambda}{\omega} \gamma^A\gamma^B\gamma^D.\tag{4.13}$$

Die Dirac-Gleichung nimmt die übliche Form in der Impulsdarstellung an:

$$(\not{p} - m)\psi = 0 . \quad (4.14)$$

Das Skalarprodukt auf dem Raum der q -deformierten Dirac-Spinoren wird durch η gegeben, so daß die q -Dirac-Matrizen bezüglich dieser quadratischen Form hermitisch sind:

$$(\phi, \psi) := \phi^+ \eta \psi . \quad (4.15)$$

Hermitizität bezüglich dieses Skalarprodukts bedeutet für einen Operator H gerade

$$(H\phi, \psi) = (\phi, H\psi) \quad \text{i.e.} \quad H^+ = \eta H \eta . \quad (4.16)$$

Insbesondere ist der q -Dirac-Operator hermitisch bezüglich dieses Skalarprodukts²:

$$\begin{aligned} (\eta \not{p})^+ &= (\eta \gamma^I)^+ \overline{p_I} \\ &= \frac{1}{q^2} \eta \gamma^B q^2 p_B + q^2 \eta \gamma^A \frac{1}{q^2} p_A + \eta \gamma^C \partial_C + \eta \gamma^D p_D \\ &= \eta \not{p} . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Für den Dirac adjungierten Spinor $\bar{\psi} \equiv (\eta \psi)^+ = \psi^+ \eta$ gilt

$$0 = (\eta(\not{p} - m)\psi)^+ = \bar{\psi}(\not{p} - m) . \quad (4.18)$$

Aus (4.18) folgt durch Iteration die Energie-Impuls-Beziehung $p^2 = m^2$, auf den Dirac-Spinoren ergibt sich mit $p^2 = -\square$ die q -Klein-Gordon-Gleichung:

$$\square \psi = m^2 \psi . \quad (4.19)$$

Mit (4.4) ist es leicht zu zeigen, daß der Klein-Gordon-Operator reell ist.

Die q -deformierten Dirac-Matrizen haben in der chiralen Darstellung die Form (vgl. Anhang 4.9)

$$\gamma^I = \begin{pmatrix} q & \sigma^I \\ \tilde{\sigma}^I/q & \end{pmatrix} , \quad (4.20)$$

wobei $\{\sigma^I\}$ und $\{\tilde{\sigma}^I\}$ zwei Sätze q -deformierter Pauli-Matrizen sind. Der Dirac-Operator

²Es ist angemerkt, daß bei der Definition der q -deformierten γ -Matrizen eine Skalierungsfreiheit $\gamma^A \rightarrow \alpha \gamma^A$ bei $\gamma^B \rightarrow \alpha^{-1} \gamma^B$ fixiert wurden.

hat damit die explizite Form

$$\not{p} = \sqrt{\frac{\omega}{q}} \begin{bmatrix} & p^C & q p^A \\ & q p^B & q^2 p^D \\ p^D & -q p^A & \\ -q p^B & p^C - q \lambda p^D & \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Die Relation $\not{p} \cdot \not{p} = p^2$ verifiziert sich offensichtlich mit (4.2) und (4.3).

4.4 Kovarianz der q -Dirac-Gleichung

Beginnt man mit dem q -deformierten Minkowski-Raum und formuliert wie in den letzten Abschnitten die dazugehörige Dirac-Gleichung, so kann man aus den Transformationseigenschaften des Dirac-Spinors die Spinor-Darstellung der Lorentz-Gruppe gewinnen [48]. In dieser Arbeit sind wir jedoch bereits von der Spinor-Formulierung zur Konstruktion der quantisierten Lorentz-Gruppe ausgegangen, und so ist es einfach zu zeigen, daß die q -Dirac-Gleichung invariant unter q -Lorentz-Transformationen ist. Die Matrizen σ^I sind gerade diejenigen, die den Minkowski-Vierervektor in die hermitischen 2×2 -Matrizen abbilden wie in (2.21) definiert, $P = \sigma^I p_I$ mit der Transformationseigenschaft $P \rightarrow MPM^+$ unter Lorentz-Transformationen. Für die σ^I -Matrizen bedeutet dies gerade die Eigenschaft

$$\Lambda^I{}_J \sigma^J = M \sigma^I M^+. \quad (4.22)$$

Die $\tilde{\sigma}^I$ entsprechen der konjugierten inäquivalenten Darstellung M^* der $SL_q(2, \mathbf{C})$. Wegen $M^* = \epsilon \bar{M} \epsilon^{-1}$ entstehen die $\tilde{\sigma}$ aus den σ durch Konjugation und Multiplikation mit der Spinor-Metrik ϵ . Unter der Transformation $P \rightarrow MPM^+$ vertauscht die Konjugation die Quantenmatrizen M und M^+ , deshalb muß durch Anwendung der Vertauschungsrelationen eine \hat{R} -Matrix auftreten, um die Relation in Matrixmultiplikation schreiben zu können. Man findet

$$\tilde{\sigma}^I \equiv q^2 \operatorname{tr}_2 \left(\hat{R}_{12} (\epsilon \sigma^I \epsilon^+)_2^t \right) \quad (4.23)$$

i.e.

$$\tilde{\sigma}^{Ic}{}_d \equiv \hat{R}^{ca}{}_{db} (\epsilon \sigma^I \epsilon^+)^{tb}{}_a. \quad (4.24)$$

Unter Benutzung der Identität für die \hat{R} -Matrix (3.6)

$$\hat{R} = q\mathbf{1} + \epsilon \otimes \epsilon^{-1} \quad (4.25)$$

ergibt sich die einfache Beziehung

$$q^{-1} \tilde{\sigma}^I = -q \sigma + \operatorname{Tr}_q \sigma^I \quad (4.26)$$

mit der q -Spur

$$\mathrm{Tr}_q A = \mathrm{tr} \left[\begin{pmatrix} q & \\ & 1/q \end{pmatrix} A \right] . \quad (4.27)$$

Insbesondere im $q \rightarrow 1$ Limes vermittelt diese Formel den Übergang $\{\mathbf{1}, \sigma^i\} \rightarrow \{\mathbf{1}, -\sigma^i\}$. Unter der Deformation ist $\mathrm{Tr}_q P$ proportional zur Energie $\sqrt{q/\omega}(p^C + p^D)$. Die Größe $\tilde{P} = \tilde{\sigma}^I p_I$ transformiert dann zu $M^* \tilde{P} M^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Lambda^I_J \tilde{\sigma}^J &= \Lambda \tilde{\sigma}^I \\ &= \Lambda^I_J \hat{R}^{ca}_{db} (\epsilon \sigma^I \epsilon^+)^{tb}{}_a \\ &= \hat{R}^{ca}_{db} (\epsilon M \sigma^I M^+ \epsilon^+)^{tb}{}_a \\ &= \hat{R}^{ca}_{db} (\epsilon M \epsilon^{-1} \epsilon \sigma^I \epsilon^+ \epsilon^{+^{-1}} M^+ \epsilon^+)^{tb}{}_a \\ &= \hat{R}^{ca}_{db} (M^{-1}{}^t \tilde{\sigma}^I M^{*t})^{tb}{}_a \\ &= M^* \tilde{\sigma}^J M^{-1} . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hierbei wurden die Eigenschaft $\epsilon M \epsilon^{-1} = M^{-1}{}^t$ und die Vertauschungsrelationen (2.58) für den Fall $s = q$ und damit $S = R$, also $R M_2^* M_1 = M_1 M_2^* R$, benutzt. Der q -Dirac-Spinor ψ ist darstellungstheoretisch die Summe der beiden inäquivalenten zweidimensionalen Darstellungen der $SL_q(2, \mathbf{C})$:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M & \\ & M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} , \quad (4.29)$$

und der q -Dirac-Operator \not{p} transformiert entsprechend

$$\begin{pmatrix} \sigma \cdot p \\ \tilde{\sigma} \cdot p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M & \\ & M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \cdot p \\ \tilde{\sigma} \cdot p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{-1} & \\ & M^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cdot \Lambda p \\ \tilde{\sigma} \cdot \Lambda p \end{pmatrix} , \quad (4.30)$$

was die obigen Relationen zusammenfaßt.

4.5 Lösungen im Ruhesystem

Die Impuls-Algebra (4.1) läßt sich auf das Ruhesystem mit den Forderungen

$$p^A = p^B = 0 , \quad p^C = \sqrt{q/\omega} qE , \quad p^D = \sqrt{q/\omega} E/q \quad (4.31)$$

einschränken. Die Energie ist die Kombination $E = \sqrt{q/\omega} (p^C + p^D)$. Der Dirac-Operator hat dann die Form

$$\not{p} = E \gamma_q^0 = \begin{bmatrix} qE & \mathbf{1} \\ E/q \mathbf{1} & \end{bmatrix} . \quad (4.32)$$

Die Dirac-Gleichung entspricht einem gekoppelten Gleichungssystem, das sich für die Unterspinoren zur Energie-Masse-Relation iteriert:

$$\left. \begin{array}{l} q^{-1}E\phi = m\chi \\ qE\chi = m\phi \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} E^2\phi = m^2\phi \\ E^2\chi = m^2\chi \end{array} \quad (4.33)$$

Es folgt, daß die Zustände die Energie $E = \pm m$ haben, die jeweils zweifach entartet sind. Als Lösungen wählen wir

$$\begin{aligned} \psi_+^1(0) &= \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \psi_+^2(0) &= \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \psi_-^1(0) &= \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \psi_-^2(0) &= \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Bezüglich des Skalarprodukts (4.15) sind diese Zustände auf das Energievorzeichen normiert:

$$(\psi_\epsilon^s, \psi_{\epsilon'}^{s'}) = (\psi_\epsilon^s)^+ \eta \psi_{\epsilon'}^{s'} = \epsilon \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta^{ss'}. \quad (4.35)$$

Diese Normierung ist kovariant: Mit den Transformationen $\phi \rightarrow M\phi$ und $\chi \rightarrow M^*\chi$ ergibt sich

$$(\psi, \tilde{\psi}) = \chi^+ \tilde{\phi} + \phi^+ \tilde{\chi} \mapsto \chi^+ M^{-1} M \tilde{\phi} + \phi^+ M^+ M^* \tilde{\chi} = (\psi, \tilde{\psi}). \quad (4.36)$$

4.6 Allgemeine Lösungen

Die allgemeine Lösung der freien q -deformierten Dirac-Gleichung läßt sich auf zwei verschiedene Arten gewinnen: Zum einen kann man die Identität

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = 0 \quad (4.37)$$

verwenden. Sie sagt aus, daß die Projektionen

$$\Pi_\pm = \frac{1}{2m} (\not{p} \pm m) \quad (4.38)$$

auf die positiven und negativen Energiezustände orthogonal sind. Daraus folgt, daß

$$\psi_+^s(p) := (\not{p} + m) \phi_+^s \quad (4.39)$$

mit ϕ_+^s dergestalt, daß

$$\psi_+^s(0) = m(\gamma_q^0 + 1) \phi_+^s \quad (4.40)$$

wobei $\gamma_q^0 = \sqrt{\omega/q} (\gamma^C + \gamma^D)$ die Dirac-Gleichung für Zustände positiver Energie $(\not{p} - m)\psi = 0$ erfüllt und entsprechend für Zustände negativer Energie. Bei diesem Zugang treten dann allerdings Probleme bei der Normierung der Zustände auf; sie lassen sich z.B. auf p^D normieren, doch ist die Wurzel des Operators in der Koordinaten-Algebra der Impulse nicht notwendigerweise konsistent einzuführen, so daß man die Zustände auf die Identität normieren könnte.

Eine andere Möglichkeit ist es, mit der Matrix-Identifikation (2.21) zu arbeiten und die allgemeinen Zustände durch Lorentz-Transformation aus denen des Ruhesystems zu gewinnen. Dem Vierervektor im Ruhesystem $(m, 0, 0, 0)$ entspricht in der Koordinatenwahl $p^A \dots p^D$ der Vektor

$$p_0 = \sqrt{\omega/q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ qm \\ m/q \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Als entsprechende Matrix ergibt sich

$$P_0 = \sigma^I p_{0I} = \begin{pmatrix} m & \\ & m \end{pmatrix} = m \mathbf{1}. \quad (4.42)$$

Der Lorentz-Transformation $p_0 \rightarrow p = \Lambda p_0$ entspricht

$$P_0 \rightarrow P = MPM^+ = m MM^+ = m \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^C/q & p^A \\ p^B & qp^D \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Die Ruhesystemszustände transformieren in Zustände mit den nichtkommutativen Impulskoordinaten (p^A, p^B, p^C, p^D) :

$$\psi_\pm^1(0) = \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \psi_\pm^1(p) = \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} q a \\ q c \\ \pm \bar{d} \\ \mp q \bar{b} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\pm}^2(0) = \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \psi_{\pm}^1(p) = \frac{1}{\sqrt{2q}} \begin{pmatrix} q b \\ q d \\ \mp q \bar{c} \\ \pm \bar{a} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Wie bereits dargestellt, bleibt die Normierung der Zustände unter Transformationen (4.39) invariant.

4.7 Bilineare Kovarianten

Eine bilineare Invariante aus q -Dirac-Spinoren haben wir bereits ermittelt, die Norm. Schreiben wir im folgenden $(\mu, \psi)_{\eta} = \langle \mu | \psi \rangle$, so gilt

$$\langle \psi_{\epsilon} | \psi_{\epsilon} \rangle = \epsilon. \quad (4.45)$$

Die Größe

$$\langle \psi | \eta | \psi \rangle = \phi^+ \phi + \chi^+ \chi \quad (4.46)$$

ist genau dann invariant unter Transformationen, wenn $M = M^*$ gilt, d.h. für die $SU_q(2)$ Untergruppe der $SL_q(2, \mathbb{C})$. Diese Größe ist also q -rotations-invariant. Insbesondere ist sie im Gegensatz zu $\langle \psi | \psi \rangle$ positiv und erfüllt damit alle Bedingungen, um als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert zu werden. Für einen q -Dirac-Spinor im Ruhesystem gilt

$$\langle \psi_{\epsilon}^s(0) | \eta | \psi_{\epsilon}^s(0) \rangle = \omega/2, \quad (4.47)$$

und nach einer Lorentz-Transformation ergibt sich mit (4.40)

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\epsilon}^s(p) | \eta | \psi_{\epsilon}^s(p) \rangle &= 1/(2q) (\phi^+ M^+ M \phi + \chi^+ M^{-1} M^* \chi) \\ &= 1/(2q) (a\bar{a} + b\bar{b} + q^2 (c\bar{c} + d\bar{d})) \\ &= \frac{1}{2m} (p^C + p^D) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2q}} \frac{E}{m}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Mit dem q -deformierten ϵ -Tensor aus den Projektoren der \hat{R} -Matrix (2.83) $\epsilon \sim P_+ - P_-$ und der Definition $\gamma^5 \equiv \epsilon_{IJKL} \gamma^I \gamma^J \gamma^K \gamma^L \cdot const$, berechnet sich [47]

$$\gamma_q^5 = -\frac{2q}{\omega} \gamma^D \gamma^C \gamma^B \gamma^A + \frac{2q}{\omega} \gamma^B \gamma^A - \frac{2}{q\omega} \gamma^D \gamma^C + 1, \quad (4.49)$$

mit den folgenden einfachen Relationen

$$\begin{aligned}\gamma^A \gamma_q^5 + q^{-2} \gamma_q^5 \gamma^A &= 0 & \gamma^C \gamma_q^5 + \gamma_q^5 \gamma^C &= 0 \\ \gamma^B \gamma_q^5 + q^2 \gamma_q^5 \gamma^B &= 0 & \gamma^D \gamma_q^5 + \gamma_q^5 \gamma^D &= 0.\end{aligned}\quad (4.50)$$

Das Quadrat ist $(\gamma_q^5)^2 = 1 - \lambda \omega q^{-2} \gamma^B \gamma^A$, und damit gibt es auch ein Inverses dieses Elements $(\gamma_q^5)^{-1} \neq \gamma_q^5$. Man findet jedoch als Linearkombination $q\omega^{-1} \gamma_q^5 + q^{-1}\omega^{-1} (\gamma_q^5)^{-1} = \gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, den Pseudoskalar der undeformierten Clifford-Algebra. Aus der Identifikation (4.12) ist darüberhinaus zu sehen, daß weiterhin die übliche γ^5 -Matrix der Pseudoskalare ist. Als Folge ist mit der Norm als skalare Größe

$$\langle \psi | \gamma^5 | \psi \rangle = \phi^+ \chi - \chi^+ \phi \quad (4.51)$$

eine pseudoskalare bilineare Invariante unter q -Lorentz-Transformationen. Die Einführung der q -deformierten γ -Matrizen als Quantenebene in Abschnitt 2.5 zeigte, daß sich die γ^I als q -Vektor transformieren. Die chiralen Generatoren der quantisierten Lie-Algebra aus Abschnitt 3.8 transformieren sich wie Tensoren zweiter Stufe. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle \psi | \gamma^I | \psi \rangle &\quad q\text{-Vektor}, \\ \langle \psi | \gamma^5 \gamma^I | \psi \rangle &\quad q\text{-Pseudo-Vektor}, \\ \langle \psi | \gamma^I \gamma^J | \psi \rangle &\quad q\text{-Tensor}.\end{aligned}\quad (4.52)$$

Damit ergeben sich alle quantisierten Analoge zu den üblichen 16 bilinearen Kovarianten des Dirac-Spinors [18].

4.8 Charakterisierung der Einteilchen-Zustände

Wir wollen nun zeigen, daß sich die konstruierten q -Spin-1/2-Zustände ψ_ϵ^s im Spin-Raum mit entsprechenden Operatoren durch die Quantenzahlen Energievorzeichen $\epsilon = \pm 1$ und relative Spinausrichtung $s = \epsilon\sigma = \pm 1$ charakterisieren lassen. In einem zweiten Schritt fügen wir die Bahn-Quantenzahlen hinzu.

Im Ruhesystem hat der Energievorzeichen-Operator \mathcal{E} die Form

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} q & \mathbf{1} \\ q^{-1} \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q\omega}} (\gamma^C + \gamma^D) = \gamma_q^0. \quad (4.53)$$

Die Zustände (4.32) sind Eigenzustände zu \mathcal{E} :

$$\mathcal{E}|\psi\rangle = \epsilon |\psi\rangle \quad E = \epsilon m. \quad (4.54)$$

Für ein allgemeines Bezugssystem haben der Energievorzeichen-Operator und die dazugehörigen Projektoren die Form

$$\mathcal{E} = \frac{1}{m} y' \quad \Pi_{\pm} = \frac{1}{2m} (y' \pm m) . \quad (4.55)$$

Der Spin-Operator im Ruhesystem ist

$$\Sigma = \begin{bmatrix} q & -q \\ 1/q & -1/q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{q}{\omega^3}} (\gamma^A \gamma^B - \gamma^B \gamma^A) (\gamma^C + \gamma^D) \quad (4.56)$$

mit

$$\Sigma |\psi\rangle = \sigma |\psi\rangle \quad (4.57)$$

für die Eigenzustände (4.32) im Ruhesystem. (Wie üblich werden die Eigenwerte des Spin-Operators für negative Energie vertauscht [18].) Die Projektoren auf die Spin-Zustände sind $\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \Sigma)$. Die Operatoren für Energievorzeichen und Spinausrichtung kommutieren im Ruhesystem und aufgrund der Transformationseigenschaften dann auch in jedem Bezugssystem

$$[\Sigma, \mathcal{E}] = 0 . \quad (4.58)$$

Ein weiterer wichtiger Operator, der nicht mit diesen beiden vertauscht, ist der Heli-zitäts-Operator

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \\ & -\mathbf{1} \end{bmatrix} . \quad (4.59)$$

Zur Beschreibung eines quantenmechanischen Zustands benötigt man die Quantenzahlen der maximalen Anzahl kommutierender Operatoren. Für die inneren Freiheitsgrade haben wir diese gerade angegeben. Im undeformierten Fall kann man zur vollständigen Beschreibung eines Zustandes, z. B. für ein Elektron oder Positron, neben Energievorzeichen und Spinausrichtung die Quantenzahlen des Viererimpulses nehmen. Für den Fall der quantisierten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ist der maximale Satz observabler Impulskomponenten z.B. $\{p^2, p^C, p^D\}$. Aus der Diskussion der q -deformierten Poincaré-Lie-Algebra [33] folgt, daß man eine Komponente des Drehimpulses L_3 hinzunehmen muß und so zu einem vollständigen Satz von kinematischen Quantenzahlen kommt. Ein beliebiger Zustand eines freien Spin-1/2-Teilchens in quantisierter Raum-Zeit ist also gegeben durch

$$\psi = |m, p^C, p^D, L_3; \epsilon, s\rangle . \quad (4.60)$$

Da die nichtdiagonalen Operatoren $p^A, p^B, L_{\pm} \dots$ mit q -Faktoren mit den diagonalen vertauschen, wirken sie wie Auf- und Absteige-Operatoren (wie beim quantenmechanischen Drehimpuls) und führen zu diskreten Spektren der Observablen, die im wesentlichen proportional zu Potenzen von q sind.

Somit haben wir in Erweiterung der Darstellungstheorie von [33] q -deformierte Einteilchenzustände mit Spin angegeben.

4.9 Anhang

Matrix-Darstellung

Die q -deformierten γ -Matrizen sind durch die Identifikation (2) zu berechnen. Mit den Pauli-Matrizen $\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich die chirale Darstellung zu

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \tau^i \\ -\tau^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

und die q -deformierten γ -Matrizen sind

$$\begin{aligned} \gamma^A &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \gamma^B &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ \gamma^C &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & q\lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^2 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \gamma^D &= \sqrt{\frac{\omega}{q}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Zwei Familien deformierter Pauli-Matrizen werden durch

$$\gamma^I = \sqrt{\frac{\omega}{q}} \begin{pmatrix} q & \sigma^I \\ \tilde{\sigma}^I/q & 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

eingeführt. In dieser Darstellung ist die γ^5 -Matrix diagonal

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Literaturverzeichnis

- [1] Abe E: *Hopf Algebras*, Cambridge University Press 1977.
- [2] Bargmann V, Wigner E: *Group theoretical discussion of relativistic wave equations*, Proc. N. A. S. **34**, 211 (1948).
- [3] Bonora L, Bonservizi V: *Quantum sl_n Toda field theories*, Nucl. Phys. **B390**, 205 (1993).
- [4] Carow-Watamura U, Schlieker M, Scholl M, Watamura S: *Tensor representation of the quantum group $SL_q(2, C)$ and quantum Minkowski space*, Z. Phys. **C48**, 159 (1990).
- [5] Carow-Watamura U, Schlieker M, Scholl M, Watamura S: *A quantum Lorentz group*, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 3081 (1991).
- [6] Chaichian M, Demichev A P: *Quantum Poincaré group*, Phys. Lett **B304**, 220 (1993).
- [7] Connes A: *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. I.H.E.S. **62** (1985).
- [8] Cremmer E, Gervais, J L: *The quantum group structure associated with non-linearly extended Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **134**, 619 (1990).
- [9] Dirac P A M: *Relativistic wave equations*, Proc. Roy. Soc. **A155**, 447 (1936).
- [10] Dirac P A M: *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press 1958⁴.
- [11] Drabant B, Schlieker M, Weich W, Zumino B: *Complex Quantum groups und their quantum enveloping Algebren*, in: *Quantum groups und related topics*, R. Gielerak et.al. (Hgg.), Math. Phys. Studies **13**, 13 (1992).
- [12] Drinfel'd V G: *Quantum groups*, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, 798 (1987).
- [13] Faddeev L D: *On the relation between mathematics and physics*, in: *Integrable systems (Nankai Lectures)*, S. Xing-Chang (Hg.), World Scientific 1991.
- [14] Feynman R P: *The Character of the Physical Law*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1968.

- [15] Heisenberg W: *Die “beobachtbaren Größen” in der Theorie der Elementarteilchen*, Z. Phys. **120**, 513 (1943).
- [16] Hellund E J: *Quantized space-time*, Phys. Rev. **94**, 192 (1954).
- [17] Hill E L: *Relativistic Theory of discrete momentum space and discrete space-time*, Phys. Rev. **100**, 1780 (1955).
- [18] Itzykson C, Zuber J-B: *Quantum Field Theory*, MacGraw-Hill, New York 1980.
- [19] Jimbo M: *A q -analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11**, 247 (1986).
- [20] Majid S: *Quasitriangular Hopf algebras und Yang-Baxter equations*, Int. J. Mod. Phys. **5**, 1 (1990).
- [21] Majid S: *Braided momentum in the q -Poincaré group*, J. Math. Phys. **34**, 2045 (1993).
- [22] Manin Yu I: *Space-time as physical system*, in: *Mathematics and Physics*, Birkhäuser, Basel 1981.
- [23] Manin Yu I: *Quantum groups und non-commutative geometry*, Preprint Montreal University CRM-1561 (1988).
- [24] Merkulov S A: *Quantum deformation of compactified Minkowski space*, Z Phys. **C52**, 583 (1992).
- [25] Newton-Smith W H: *The Structure of Time*, Routledge & Kegan Paul, London 1980.
- [26] Niederer U H, O’Raifeartaigh L: *Realizations of the unitary representations of the inhomogenous space-time groups I & II*, Forts. Phys. **22**, 111 und 131 (1974).
- [27] Ogievetsky O, Schmidke W B, Wess J, Zumino B: *Six Generator q -deformed Lorentz Algebra*, Lett. Math. Phys. **23**, 233 (1991).
- [28] Ogievetsky O, Schmidke W B, Wess J, Zumino B: *q -Deformed Poincaré Algebra*, Commun. Math. Phys. **150**, 495 (1992).
- [29] Ogievetsky O: *Reality in the differential calculus on q -Euclidean Spaces*, Lett. Math. Phys. **25**, 121 (1992).
- [30] Penrose R: *Twistor algebra*, J. Math. Phys. **8**, 345 (1967).
- [31] Penrose R, MacCallum M A H: *Twistor theory: an approach to the quantisation of fields and space-time*, Phys. Rep. (Phys. Lett C) **6**, 241 (1972).
- [32] Penrose R, Rindler W: *Spinors and space-time*, 2 Bde., Cambridge University Press 1984 & 1986.

- [33] Pillin M, Schmidke W B, Wess J: *q -Deformed relativistic one-particle states*, im Erscheinen in Nucl. Phys. B (1993).
- [34] Pillin M, Weikl L: *On representations of the q -deformed Lorentz and Poincaré algebras*, preprint MPI-Ph/93-19 (1993).
- [35] Podles P, Woronowicz S L: *Quantum deformation of Lorentz group*, Commun. Math. Phys. **133**, 381 (1990).
- [36] Poincaré H: *Letzte Gedanken (Dernières Pensées)*, Leipzig (Paris) 1913.
- [37] Pusz W: *Irreducible unitary representations of quantum Lorentz group*, Commun. Math. Phys. **152**, 591 (1993).
- [38] Reshetikhin N Yu, Takhtajan L A, Faddeev L D: *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1**, 193 (1990).
- [39] Reshetikhin N: *Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras*, Lett. Math. Phys. **20**, 331 (1990).
- [40] Riemann B: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, in: *Collected Works*, H. Weber (Hg.), Dover Publ., New York 1953.
- [41] Rojansky V: *Quantum-mechanical Operators*, Phys. Rev. **97**, 507, (1955).
- [42] Schirrmacher A, Wess J, Zumino B: *The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and Lie algebra*, Z. Phys. **C49**, 317 (1991).
- [43] Schirrmacher A: *The multiparametric deformation of $GL(n)$ and the covariant differential calculus on the quantum vector space*, Z. Phys. **C50**, 321 (1991).
- [44] Schirrmacher A: *Multiparameter R-matrices and their quantum groups*, J. Phys. **A24**, L1249 (1991).
- [45] Schirrmacher A: *Aspects of quantising Lorentz symmetry*, in: *New symmetry principles in quantum field theory*, J. Fröhlich et.al. (Hgg.), Plenum Press, New York, **B295**, 505 (1992).
- [46] Schirrmacher A: *Remarks on the use of \hat{R} -matrices*, in: *Quantum groups and related topics*, R. Gielerak et.al. (Hgg.), Math. Phys. Studies Series **13**, 55, Kluwer, Dordrecht 1992.
- [47] Schirrmacher A: *The algebra of q -deformed γ -matrices*, Anales de Fisica, Monografias, M. A. del Olmo et.al. (Hgg.), **1**, 184 (1993).
- [48] Schirrmacher A: *Quantum groups, quantum spacetime and Dirac equation*, in: *Low dimensional topology and quantum field theory*, H. Osborn (Hg.), Plenum Press, New York , ??? (1993).
- [49] Schirrmacher A: *The structure of $U_q(sl(2, \mathbf{C}))$* , Preprint MPI-Ph/93-31 (1993).

- [50] Schmidke W B, Wess J, Zumino B: *A q -deformed Lorentz algebra*, Z. Phys. **C52**, 471 (1991).
- [51] Schlieker M, Weich W, Weixler R: *Inhomogeneous quantum groups and their quantized universal enveloping algebra*, Lett. Math. Phys. **27**, 217 (1993).
- [52] Snyder H S: *Quantized space-time*, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
- [53] Sudbery A: *Matrix-element bialgebras determined by quadratic coordinate algebras*, J. Alg. **158**, 375 (1993).
- [54] Taft E: *Quantum deformation of flag schemes and Grassmann schemes. I. A q -deformation of the shape algebra*, J. Alg. **142**, 1 (1991).
- [55] Takeuchi M: *Finite dimensional representations of the quantum Lorentz group*, Commun. Math. Phys. **144**, 557 (1992).
- [56] Ward R S, Wells R O jr: *Twistor Geometry and Field Theory*, Cambridge University Press (1990).
- [57] Wells, R O jr: *Complex Manifolds and Mathematical Physics*, Bull. Am. Math. Soc. (New Series), **1**, 296 (1979).
- [58] Wess J: private Mitteilung.
- [59] Wigner E P: *On unitary representations of the inhomogenous Lorentz group*, Ann. Math. **40**, 39 (1939).
- [60] Wigner E P: *Relativistische Wellengleichungen*, Z . Phys. **124**, 665 (1948).
- [61] Wilson K G: *Confinement of quarks*, Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974).
- [62] Woronowicz S L, Zakrzewski S: *Quantum deformations of the Lorentz group. Hopf $*$ -algebra level*, Preprint Sommerfeld-Inst. (Clausthal) (1991).
- [63] Woronowicz S L, Zakrzewski S: *Quantum Lorentz group having Gauss decomposition property*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **28**, 809 (1992).
- [64] Yang C N: *On quantized space-time*, Phys. Rev. **72**, 874 (1947).

Lebenslauf

29. März 1965 geboren in Jever (Friesland) als zweiter Sohn von Margret und Manfred Schirrmacher
- 1971 – 1984 Grundschule, Orientierungsstufe und Gymnasium in Glarum, Schortens und Jever
20. Juni 1984 Abitur am Mariengymnasium Jever
- Juli 1984 – Sept. 1985 Wehrdienst und Studium der Mathematik an der Fernuniversität Hagen
- seit Oktober 1985 Studium der Physik an der Universität Hamburg
26. August 1987 Vordiplom in Physik (Nebenfach: Biologie)
- Okt. 1988 – Aug. 1989 “graduate visiting student” an University of Oxford und New College
- Okt. 1989 – Okt. 1990 Diplomarbeit bei H. Nicolai (Hamburg) mit Arbeitsaufenthalt in Karlsruhe
7. Januar 1991 Diplom in Physik an der Universität Hamburg mit Auszeichnung (Nebenfach: Philosophie)
- seit Januar 1991 zur Promotion am Max-Planck-Institut für Physik in München
- Apr. 1992 – Juli 1993 Dozententätigkeit am Leibniz-Kolleg Tübingen
4. August 1993 Abgabe der Dissertationsschrift

The Structure of $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$

ARNE SCHIRRMACHER

Max-Planck-Institut für Physik, PO Box 401212, 80712 Munich, Germany
 e-mail: ars@dmumpiwh

(Received: 24 June 1993)

Abstract. The structure of the deformation $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$ is discussed. The comultiplication, all commutation relations, and a conjugation follow in a clear way from the simple $\text{SL}_q(2)$ structure. ‘Fundamental’ and spin representation are given.

Mathematics Subject Classifications (1991).

0. A q -deformed Lorentz algebra was derived in [1, 2] by a calculative approach (checking of all consistency requirements) giving a list of relations. We would like to exhibit the structure of this noncommutative quantum algebra $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$ as a *quadratic algebra*. All commutation relations and the comultiplication can be identified with the quantum group structure of $\text{SL}_q(2)$. A natural involution is induced also in terms of *linear* relations. Representations of this algebra into $M(4 \times 4, \mathbb{C})$ related to the defining R -matrix and the spin matrices associated to the q -deformed γ -matrices are obtained. The first one is a faithful representation and can serve as definition of $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$.

1. Let M be a $\text{SL}_q(2)$ quantum matrix [3], $q \in \mathbb{R}$, $\lambda = q - q^{-1}$

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix}, \quad \det_q M = m_1^1 m_2^2 - q m_2^1 m_1^2 = 1, \quad (1)$$

with the commutation relations

$$\begin{aligned} m_1^1 m_2^1 &= q m_2^1 m_1^1, & m_1^1 m_2^2 &= q m_2^2 m_1^1, \\ m_1^2 m_2^1 &= q m_2^1 m_1^2, & m_2^1 m_2^2 &= q m_2^2 m_2^1, \\ m_2^1 m_1^2 &= m_1^2 m_2^1, & m_1^1 m_2^2 &= m_2^2 m_1^1 + \lambda m_2^1 m_1^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Then the comultiplication is generated by matrix multiplication

$$\Delta(M) = M \dot{\otimes} M. \quad (3)$$

There are two ways to give the quantum deformation of $SU_q(2)$:

(a) as one unitary quantum matrix of type (1) generated by

$$\hat{R}MM = MM\hat{R} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} q & & & \\ & \lambda & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & q \end{pmatrix} \quad (4)$$

and the unitarity condition $M^+M = 1$, i.e.

$$\overline{m_1^1} = m_2^2 \quad \text{and} \quad \overline{m_2^1} = -qm_1^2;$$

or (b) as a pair of upper and lower triangular unimodular quantum matrices \mathcal{L}_+ and \mathcal{L}_- with relations

$$\begin{aligned} \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_+ &= \mathcal{L}_+\mathcal{L}_+\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_-\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_-\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+\hat{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

and unitarity condition $(\mathcal{L}_+)^+ = (\mathcal{L}_-)^{-1}$.

These are known as dual descriptions [3, 4]. It will turn out that this is not necessarily the duality between quantum group and its enveloping algebra $G_q \leftrightarrow U_q(g)$ as also the latter can take the form (a) and vice versa (cf. the Iwasawa decomposition for $SL_q(2, \mathbb{C})$ [5, 6]).

2. The seven generators of the q -Lorentz group [1] can be put into three matrices of type (1) and can be identified with a more suitable set of generators $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ [3, 7]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &\equiv \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ \lambda L^+ & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{-1/4} & 0 \\ q\lambda T^+(\tau^3)^{-1/4} & (\tau^3)^{1/4} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_- &\equiv \begin{pmatrix} l & -q\lambda L^- \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{1/4} & -\lambda/q T^-(\tau^3)^{-1/4} \\ 0 & (\tau^3)^{-1/4} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_b &\equiv \begin{pmatrix} k & -q\lambda K^1 \\ \lambda K^2 & \tilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^1(\tau^3)^{1/4} & \lambda S^1(\tau^3)^{-1/4} \\ \lambda T^2(\tau^3)^{1/4} & \sigma^2(\tau^3)^{-1/4} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

The new choice of generators exhibits a purely quadratic algebra for the quantum Lorentz group. As usual, the analogues of the Cartan subalgebra generators are accompanied by some kind of inverses l^{-1} and \tilde{k} . Since, in the deformed case, the generators of the transformation correspond to finite shifts rather than infinitesimal ones (giving rise to discrete spectra), they can be identified with entries in the quantum matrices corresponding to the deformed Lie group.

The commutation relations of the q -Lorentz algebra are given by the R -matrix Equations (5) for the rotation subalgebra and the following relations

$$\hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_b = \mathcal{L}_b\mathcal{L}_b\hat{R}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_b &= \mathcal{L}_b\mathcal{L}_+\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_b\hat{R}. \end{aligned} \quad (8)$$

While the deformation of the rotation subalgebra is of type (b), the boost containing subalgebra takes the form (a); the remaining relations are given similarly (8).

3. We list now the explicit relations and compare them with those of [1]. We can read off for the rotation subalgebra from (6) using (2)

$$\begin{aligned} L^+l &= qll^+, \\ L^-l &= q^{-1}ll^-, \\ [L^+, L^-] &= q^{-1}\lambda^{-1}(l^{-2} - l^2). \end{aligned} \quad (9)$$

This equates also to

$$\begin{aligned} \tau^3T^+ &= q^{-4}T^+\tau^3, \\ \tau^3T^- &= q^4T^-\tau^3, \\ T^+T^- &= q^2T^-T^+ + q\lambda^{-1}(1 - \tau^3), \end{aligned} \quad (10)$$

as proposed. The relations among rotations and boosts are

$$\begin{aligned} kL^+ &= q^{-1}L^+k + q^{-1}\lambda l^{-1}K^2, & kL^- &= q^{-1}L^-k + q^{-1}\lambda lkK^1, \\ \bar{k}L^+ &= qL^+\bar{k} - \lambda K^2l, & \bar{k}L^- &= qL^-\bar{k} - \lambda K^1l^{-1}, \\ kl &= lk, & \bar{k}l &= l\bar{k}, \\ K^1L^+ &= L^+K^1 - q^{-1}\lambda^{-1}(l^{-1}\bar{k} - lk), & K^1L^- &= L^-K^1, \\ K^2L^+ &= L^+K^2, & K^2L^- &= L^-K^2 + q^{-1}\lambda^{-1}(kl^{-1} - l\bar{k}), \\ K^1l &= q^{-1}lkK^1, & K^2l &= qlK^2, \end{aligned} \quad (11)$$

matching

$$\begin{aligned} \tau^1T^+ &= T^+\tau^1 + \lambda T^2, & \tau^1T^- &= q^{-2}T^-\tau^1 - \lambda S^1, \\ \sigma^2T^+ &= T^+\sigma^2 - q^2\lambda\tau^3T^2, & \sigma^2T^- &= q^2T^-\sigma^2 + q^2\lambda S^1, \\ \tau^1\tau^3 &= \tau^3\tau^1, & \sigma^2\tau^3 &= \tau^3\sigma^2, \\ S^1T^+ &= q^{-2}T^+S^1 - q^{-2}\lambda^{-1}(\tau^3\tau^1 - \sigma^2), & S^1T^- &= T^-S^1, \\ T^2T^+ &= q^2T^+T^2, & T^2T^- &= T^-T^2 + \lambda^{-1}(\tau^1 - \sigma^2), \\ S^1\tau^3 &= q^{-4}\tau^3S^1, & T^2\tau^3 &= q^4\tau^3T^2. \end{aligned} \quad (12)$$

And for the boost containing subalgebra, we find

$$\begin{aligned} kK^1 &= qK^1k, & kK^2 &= qK^2k, \\ \tilde{k}K^1 &= q^{-1}K^1\tilde{k}, & \tilde{k}K^2 &= q^{-1}K^2\tilde{k}, \\ K^1K^2 &= K^2K^1, & k\tilde{k} &= \tilde{k}k - q\lambda^3K^1K^2, \end{aligned} \quad (13)$$

which corresponds to

$$\begin{aligned} \tau^1S^1 &= S^1\tau^1, & \tau^1T^2 &= q^2T^2\tau^1, \\ \sigma^2S^1 &= S^1\sigma^2, & \sigma^2T^2 &= q^{-2}T^2\sigma^2, \\ S^1T^2 &= T^2S^1, & \tau^1\sigma^2 &= \sigma^2\tau^1 + q\lambda^3S^1T^2. \end{aligned} \quad (14)$$

The requirement of unimodularity of \mathcal{L}_b reduces the number of independent generators of Lorentz group to six as discussed in [7], i.e.

$$\begin{aligned} 1 &= \det_q \mathcal{L}_b = k\tilde{k} + q\lambda^2K^1K^2 \\ &= \tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2S^1T^2. \end{aligned} \quad (15)$$

This relation can be used to eliminate \tilde{k} in the same manner as the relation $ll^{-1} = 1$ to eliminate l^{-1} . For the structure and computations, it is of advantage to use the quadratic algebra $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ rather than $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$.

4. The comultiplications is generated by matrix multiplication (3). For the rotation part, one gets

$$\begin{aligned} \Delta(l) &= l \otimes l, \\ \Delta(L^+) &= L^+ \otimes l^{-1} + l \otimes L^+, \\ \Delta(L^-) &= L^- \otimes l + l^{-1} \otimes L^-, \end{aligned} \quad (16)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \Delta(\tau^3) &= \tau^3 \otimes \tau^3, \\ \Delta(T^+) &= T^+ \otimes 1 + (\tau^3)^{1/2} \otimes T^+, \\ \Delta(T^-) &= T^- \otimes 1 + (\tau^3)^{1/2} \otimes T^-, \end{aligned} \quad (17)$$

and for the boost containing part one finds

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= k \otimes k - q\lambda^2K^1 \otimes K^2, \\ \Delta(\tilde{k}) &= \tilde{k} \otimes \tilde{k} - q\lambda^2K^2 \otimes K^1, \\ \Delta(K^1) &= K^1 \otimes \tilde{k} + k \otimes K^1, \\ \Delta(K^2) &= K^2 \otimes k + \tilde{k} \otimes K^2. \end{aligned} \quad (18)$$

which corresponds to

$$\begin{aligned}\Delta(\tau^1) &= \tau^1 \otimes \tau^1 + \lambda^2 S^1 (\tau^3)^{-1/2} \otimes T^2, \\ \Delta(\sigma^2) &= \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \lambda^2 T^2 (\tau^3)^{1/2} \otimes S^1, \\ \Delta(S^1) &= S^1 \otimes \sigma^2 + (\tau^3)^{1/2} \tau^1 \otimes S^1, \\ \Delta(T^2) &= T^2 \otimes \tau^1 + (\tau^3)^{-1/2} \sigma^2 \otimes T^2.\end{aligned}\tag{19}$$

In the new generators the comultiplication takes a simple quadratic form.

5. The involution of the Lorentz algebra simply follows from (crossing) unitarity of \mathcal{L}_+ and \mathcal{L}_- and unitarity of \mathcal{L}_b

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_+)^+ &= (\mathcal{L}_-)^{-1}: \begin{pmatrix} \bar{l}^{-1} & \lambda \bar{L}^+ \\ 0 & \bar{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^{-1} & \lambda L^- \\ 0 & l \end{pmatrix}, \\ (\mathcal{L}_b)^+ &= (\mathcal{L}_b)^{-1}: \begin{pmatrix} \bar{k} & \lambda \bar{K}^2 \\ -q\lambda \bar{K}^1 & \bar{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k} & \lambda K^1 \\ -q\lambda K^2 & k \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{20}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\bar{l} &= l, \\ \bar{k} &= \bar{k}, \\ \bar{L}^+ &= L^-, \\ \bar{K}^1 &= K^2\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\bar{T}^\mp &= q^{\mp 2} T^\mp, \\ \bar{\tau}^3 &= \tau^3, \\ \bar{T}^2 &= -(\tau^3)^{-1/2} S^1, \\ \bar{S}^1 &= -q^2 (\tau^3)^{1/2} T^2, \\ \bar{\tau}^1 &= (\tau^3)^{-1/2} \sigma^2, \\ \bar{\sigma}^2 &= (\tau^3)^{1/2} \tau^1.\end{aligned}\tag{21}$$

Thus, we observe again a simple structure for the proposed choice of generators having linear conjugation relations. By construction, the conjugation is compatible with the relations (9), (11), (13).

6. The quantization of Lie algebras and Lie groups is related via a pairing duality [3, 4]

$$\begin{aligned}\langle \cdot | \cdot \rangle: G_q \otimes U_q(g) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle \mathbf{L}^\pm | \mathbf{T} \rangle &= \mathbf{R}^\pm,\end{aligned}\tag{22}$$

$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^- = P\mathbf{R}^{-1}P$. This gives a representation of the quantum Lorentz algebra in terms of submatrices of the R -matrix of the Lorentz group \mathbf{R} built from the R -matrix of $SL_q(2)$ [8, 7]: $\mathbf{R}_{1234} = R_{23}R_{13}R_{24}R_{14}^{-1}$.^{*} This is sometimes called the ‘fundamental’ or ‘adjoint’ representation for the q -deformed Lie algebra, since one can understand the R -matrix as a matrix of structure constants of the deformed Lie algebra. In terms of the group $SL_q(2, \mathbb{C})$, a vector X^{ab} transforms with $M \times \bar{M}$ ($(A \times B)_{kl}^{ij} = A_k^i B_l^j$). As a consequence we find the decomposition [7]

$$\mathbf{L}_{21}^+ = \mathcal{L}_+ \times \mathcal{L}_b, \quad \mathbf{L}_{21}^- = \mathcal{L}_b \times \mathcal{L}_-. \quad (23)$$

Relations (5), (7), and (8) give the according relations (5) for \mathbf{R} and \mathbf{L}^\pm . From the 18 nonvanishing elements of \mathbf{L}^+ and \mathbf{L}^- , one can isolate the factors and finds the ‘ q -adjoint’ representation

$$\begin{aligned} L^+ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \end{pmatrix}, & L^- &= \begin{pmatrix} \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ l &= \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \end{pmatrix}, & l^{-1} &= \begin{pmatrix} q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \\ K^1 &= \begin{pmatrix} \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & K^2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ k &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, & \bar{k} &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

This shows that the algebra $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \bar{k})$ is from the R -matrix point of view [3] the canonical one. Moreover, this representation is faithful and hence, gives an independent proof that (9), (11), and (13) is the q -deformed Lorentz algebra

*Using a different R -matrix, this method was applied in [9] leading, however, to a complicated structure with infinite power series in the generators; the relation to the algebras discussed here is not evident.

associated to the q -deformed Lorentz group of [8, 5, 1]. It could have been used to introduce $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$.

7. Fields with spin are usually described by multicomponent spinors. The action of Lorentz transformations on spin space can be constructed out of the representations $(\frac{1}{2}, 0)$ and $(0, \frac{1}{2})$. The Dirac representation is the sum of these two. This representation can be found in the quadratic part of the associated Clifford algebra of the quantum Lorentz group [10], $\omega = q + q^{-1}$, g the metric in the basis (A, B, C, D)

$$\sigma^{IJ} = \frac{1}{2} [\gamma^J, \gamma^I]_V = \gamma^J \gamma^I + \frac{q}{\omega} g^{IJ},$$

$$g = \begin{pmatrix} & 1 & . & . \\ q^{-2} & . & . & . \\ . & . & -q\lambda & -1 \\ . & . & -1 & . \end{pmatrix}. \quad (25)$$

V is an interchanging operator related to R such that the σ^{IJ} are q -antisymmetric $V\sigma = -\sigma$.

There is an identification with the undeformed γ -matrices

$$\begin{aligned} \gamma^A &= \frac{1}{2q} (\gamma^1 - i\gamma^2), \\ \gamma^B &= \frac{q}{2} (\gamma^1 + i\gamma^2), \\ \gamma^C &= \frac{1}{2} (q^2 \gamma^0 + \gamma^3) + \frac{i}{2} (q^2 - 1) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \\ \gamma^D &= \frac{1}{2} (\gamma^0 - \gamma^3). \end{aligned} \quad (26)$$

The chiral generators have the representation

$$\begin{aligned} M^+ &\sim q^{-1} \sigma^{BD}, & M^- &\sim q^{-1} \sigma^{AC}, \\ M^3 &\sim -q \sigma^{AB} + q^{-1} \sigma^{CD}, & N^3 &\sim q^{-1} (\sigma^{AB} + \sigma^{CD}), \\ N^+ &\sim q \sigma^{AD}, & N^- &\sim -q^{-3} \sigma^{CB}, \end{aligned} \quad (27)$$

obeying the chiral q -Lorentz algebra introduced in [2]

$$\begin{aligned} q^2 M^3 M^+ - q^{-2} M^+ M^3 &= \omega M^+, \\ q^{-1} M^+ M^- - q M^- M^+ &= M^3, \\ q^{-2} M^3 M^- - q^2 M^- M^3 &= -\omega M^-, \\ q^{-2} N^3 N^+ - q^2 N^+ N^3 &= \omega N^-, \\ q N^+ N^- - q^{-1} N^- N^+ &= N^3, \\ q^2 N^3 N^- - q^{-2} N^- N^3 &= -\omega N^+. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} q^{-1}N^\pm M^\pm - qM^\pm N^\pm &= 0, \\ qN^\pm M^\mp - q^{-1}M^\mp N^\pm &= 0, \\ [M^\pm, N^3] &= 0, \quad [N^\pm, M^3] = 0, \quad [M^3, N^3] = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

The seven generators $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$ in terms of the chiral ones are

$$\begin{aligned} T^+ &= M^+ + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}N^+, \\ T^- &= M^- + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}N^-, \\ \tau^3 &= (1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}, \\ \tau^1 &= (1 - \lambda M^3)^{-1/2}, \\ \sigma^2 &= (1 - \lambda M^3)^{1/2}[1 - q\lambda^2(1 + \lambda N^3)^{-1}]N^- M^+, \\ T^2 &= q^{-1}(1 - \lambda M^3)^{-1/2}M^+, \\ S^1 &= -(1 - \lambda M^3)^{1/2}(1 + \lambda N^3)^{-1}N^-. \end{aligned} \tag{30}$$

Hence, it is easy to give the $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ representation using (27) and a chiral representation of the usual γ -matrices, e.g. take*

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \end{pmatrix}, \\ \tau^3 &= \begin{pmatrix} q^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q^{-2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & q^2 \end{pmatrix}, \\ T^+ &= \begin{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -q^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -q \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \\ S^1 &= \begin{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{31}$$

*The matrices γ^2 and γ^3 have a unusual sign to make (31) agree with the action of the generators on spinors as used in [1].

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} q^{-1} & & & \\ & q & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} q & & & \\ & q^{-1} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Representations or higher spin follow by use of the comultiplication on q -symmetrized spinors.

Using the relations (6), the spin representation for the new generators is

$$\begin{aligned} L^+ &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & & & \\ & q & & \\ & & & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, & L^- &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & q^{-1} & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \\ l &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & q \end{pmatrix}, & l^{-1} &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & q & & \\ & & q & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \\ K^1 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, & K^2 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & & & \\ & q & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \\ k &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & q & & \\ & & 1 & \\ & & & q \end{pmatrix}, & \bar{k} &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & & & \\ & 1 & & \\ & & q & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{32}$$

The conjugation on this representation is given as follows. The Dirac spinor is of type $\psi' = (x, y, -q^{1/2}\bar{y}, q^{-1/2}\bar{x})$, where x and y span a complex quantum plane [1]. Then the involution is given using the spinor metric ϵ

$$\psi^* = S\psi, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ -q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

For the matrix representation, we thus have for L any generator in the Dirac representation

$$L^+ \equiv (\bar{L})^i = SLS^{-1} \quad (34)$$

which agrees with the relations (21).

References

1. Schmidke, W. B., Wess, J., and Zumino, B., A q -deformed Lorentz Algebra, *Z. Phys. C* **52**, 471 (1991).
2. Ogievetsky, O., Schmidke, W. B., Wess, J., and Zumino, B., Six generator q -deformed Lorentz algebra, *Lett. Math. Phys.* **23**, 233 (1991).
3. Reshetikhin, N. Yu., Takhtadzhyan, L. A., and Faddeev, L. D., Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.* **1**, 193 (1990).
4. Majid, S., Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations, *Internat. J. Modern Phys.* **5**, 1 (1990).
5. Podles, P. and Woronowicz, S. L., Quantum deformation of Lorentz group, *Comm. Math. Phys.* **133**, 381 (1990).
6. Takeuchi, M., Finite dimensional representations of the quantum Lorentz group, *Comm. Math. Phys.* **144**, 557 (1992).
7. Schirrmacher, A., Aspects of quantising Lorentz symmetry, in J. Fröhlich *et al.* (eds) *New Symmetry Principles in Quantum Field Theory*, Cargèse, NATO ASI B295, Plenum, London, New York, 1992, pp. 505–512.
8. Carow-Watamura, U., Schlieker, M., Scholl, M., and Watamura, S., A quantum Lorentz group, *Internat. J. Modern Phys. A* **6**, 3081 (1991).
9. Drabant, B., Schlieker, M., Weich, W., and Zumino B., Complex quantum groups and their quantum enveloping algebras, in R. Gielerak *et al.* (eds), *Quantum Groups and Related Topics*, Math. Phys. Stud. **13**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, pp. 13–22.
10. Schirrmacher, A., Quantum groups, quantum spacetime, and the Dirac equation, in H. Osborn (ed), *Low-Dimensional Topology and Quantum Field Theory*, Cambridge, NATO ASI, Plenum, London, New York, 1993, pp. 221–230.

LETTER TO THE EDITOR

Multiparameter R -matrices and their quantum groups

Arne Schirrmacher

Max-Planck-Institut für Physik, Werner-Heisenberg-Institut, PO Box 40 12 12, Munich,
Federal Republic of Germany

Received 7 May 1991

Abstract. Multiparameter solutions of the Yang-Baxter equation associated with the groups of types A, B, C, D are given as generalizations of the well known one-parameter solutions. The R -matrix approach to quantum groups used here is related to the algebraic one of Reshetikhin.

Much has been said about quantum groups based on the so-called standard solutions of the (quantum) Yang-Baxter equation (YBE) [1, 2] while on multiparameter quantum groups only a small number of publications is at hand [3–7]. In this letter it is shown that there exist natural multiparametric generalizations of the standard solutions.

A simple example [8] will be used to introduce notation and to distinguish different types of deformation parameters. The main part of this letter presents multiparametric R -matrix solutions of the YBE associated with the groups of types A, B, C, D, and shows how they are obtained by explicitly solving the YBE. These results are then related to the algebraic approach of Reshetikhin [5] by translating it to a ‘Hopf algebra free’ formulation of the R -matrix approach of Takhtajan and others [2]. We conclude with some remarks on the prospects of multiparameter quantum groups and its applications.

As in ordinary group theory there are three structures that are related by a quantum group: the group itself given as a matrix of non-commuting entries, a coordinate space transformed by the group action, and the Lie algebra associated to the group that is in general also deformed. The commutation relations can be represented most simply using the R -matrix. Let us consider the two-dimensional general linear group as an example ($R \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$):

	notation	relations
quantum group	$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12}$
quantum plane	$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$(\hat{R} - 1)(\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) = 0$
quantum Lie algebra	T^\pm, H, K	$R_{12}L_2^\pm L_1^\pm = L_1^\pm L_2^\pm R_{12}$ $R_{12}L_2^+ L_1^- = L_1^- L_2^+ R_{12}$

where $\hat{R} = PR$, P is the permutation matrix, the normalization s.t. $\hat{R}_{ii}^{ii} = 1$, and L^\pm are matrix functionals of the generators T^\pm, H, K .

It has been shown, that if one starts with choosing a q -plane

$$xy = q yx \quad (2)$$

and a deformation of the Lie algebra relations of $\text{gl}(2)$ with parameter r

$$[T^+, T^-] = [H]_r \equiv \frac{r^H - r^{-H}}{r - r^{-1}} \quad [T^\pm, H] = \pm T^\pm \quad [K, \dots] = 0 \quad (3)$$

this corresponds to the following R -matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 1/r^2 & q/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

The matrix functionals are in this case:

$$L^+ = \begin{pmatrix} p^{(H+K)/2} & 0 \\ (r-1/r) \tilde{T}^+ & q^{(-H+K)/2} \end{pmatrix} \quad L^- = \begin{pmatrix} q^{-(H+K)/2} & -(r-1/r) \tilde{T}^- \\ 0 & p^{(H-K)/2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

where $p \equiv r^2/q$, $\tilde{T}^+ \equiv (q/r)^{H/2} T^+$, $\tilde{T}^- \equiv T^- (q/r)^{H/2}$.

The group deformation then is to be:

$$\begin{aligned} ab &= \frac{r^2}{q} ba & cd &= \frac{r^2}{q} dc & bc &= \frac{q^2}{r^2} cb \\ ac &= q ca & bd &= q db & ad - da &= \frac{r^2 - 1}{q} bc \end{aligned} \quad (6)$$

which is the two-parameter deformation of $\text{GL}(2)$. A second quantum plane of exterior variables ξ , η , that can be interpreted as differentials of x and y , is also determined:

$$\xi\eta = -\frac{q}{r^2} \eta\xi. \quad (7)$$

The determinant can be defined and becomes central for $q = r$ which allows us to define $\text{SL}_q(2)$. (For details see [8], note the different notations for the second parameter r , $X = r^2$, or $p = r^2/q$.)

The underlying field for the coefficients has tacitly been assumed to be \mathbb{C} and 'real' versions of the group can be obtained by giving an appropriate conjugation. There are, however, two ways to do this:

$$\begin{aligned} (a) \quad \bar{x} &= y & \bar{y} &= x \\ (b) \quad \bar{x} &= x & \bar{y} &= y. \end{aligned} \quad (8)$$

Since we require $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$ the plane relations give:

$$\begin{aligned} xy = qxy &\longrightarrow \quad (a) \quad xy = \bar{q}yx \\ &\quad (b) \quad xy = \frac{1}{q}yx. \end{aligned} \quad (9)$$

For the group parameters conjugation has to be:

$$(a) \quad \bar{T} = STS = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(b) \quad \bar{T} = T$$

and hence

$$ab = \frac{r^2}{q} ba \longrightarrow (a) \quad d = \frac{\bar{r}^2}{\bar{q}} dc \quad \text{etc} \quad (11)$$

$$(b) \quad ab = \frac{\bar{q}}{r^2} ba \quad \text{etc}$$

yielding for the parameters

$$(a) \quad q, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (12)$$

$$(b) \quad q = e^{i\vartheta} \quad r^2 = e^{i\Theta} \quad \vartheta, \Theta \in \mathbb{R}.$$

i.e. both deformation parameters are either real or pure phases. These groups may be denoted as $GL_{r^2, q}(2, \mathbb{R})$ and $GL_{\Theta, \vartheta}(2, \mathbb{R})$, respectively.

Unitary groups can be found by requiring

$$T^+ = T^{-1} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -pc \\ -b/p & a \end{pmatrix} \mathcal{D}^{-1} \quad (13)$$

giving the group $U_{r^2, \vartheta}(2)$, where $q = r e^{i\vartheta}$, and $SU_r(2)$, where $q = r \in \mathbb{R}$, with two and one real deformation parameters, respectively. ($\mathcal{D} = ad - qc$ is the determinant [8].) This can be seen from, for example,

$$ac = q ca \longrightarrow b\mathcal{D}^{-1}d\mathcal{D}^{-1} = \bar{q}d\mathcal{D}^{-1}b\mathcal{D}^{-1} \Rightarrow bd = \bar{q} \frac{q^2}{r^2} db \quad (= q db!) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \bar{q}q = r^2.$$

Remark. In this paper we do not consider Hopf-* -algebra quantum groups of an extended algebra with barred and unbarred generators providing mixed commutation relations. For distinction we write $GL(2)$ instead of $GL(2, \mathbb{C})$. Such extensions are in general not difficult to find but not necessarily unique [9].

The procedure followed in the last section generalizes for $GL(n)$ and with some restrictions also for $SL(n)$, i.e. A_{n-1} . Similarly one can proceed for the classical series of semi-simple groups B_n , C_n , D_n , i.e. $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$, $SO(2n)$.

A_{n-1} —the groups $GL(n)$ and $SL(n)$. As in the two-dimensional case the Lie algebra has still one deformation parameter; the quantum space relations, however, can be chosen to be deformed more generally:

$$x^i x^j = q_{ij} x^j x^i \quad i < j \quad (15)$$

providing a total of $N_{\text{GL}} = n(n - 1)/2 + 1$ parameters (q_{ij} and r) for the corresponding R -matrix ($\mathbf{R} = R_{kl}^{ij} e_i^k \otimes e_j^l$):

$$R_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j \left(\delta^{ij} + \Theta^{ij} \frac{1}{q_{ij}} + \Theta^{ij} \frac{q_{ji}}{r^2} \right) + \delta_i^j \delta_k^l \Theta^{ij} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \quad (16)$$

where Θ^{ij} equals 1 for $i > j$ and zero otherwise. Note, no summation over repeated indices is involved here. The group relations given by this R -matrix are not difficult to work out and can be found in [6].

To arrive at the quantized $\text{SL}(n)$ from $\text{GL}_{r^2; q_{ij}}(n)$ it is necessary to make the determinant \mathcal{D} central before it can consistently be identified with unity. In the GL case the determinant has the following property [6]:

$$T_k^i \mathcal{D} = \frac{\prod_{\alpha=1}^{k-1} q_{\alpha k}}{\prod_{\beta=1}^{i-1} q_{\beta i}} \frac{\prod_{\gamma=k+1}^n (r^2/q_{k\gamma})}{\prod_{\delta=i+1}^n (r^2/q_{i\delta})} \mathcal{D} T_k^i. \quad (17)$$

In order to render the factor picked up to unity, one can simply choose all q 's equal to r . This gives the well known one-parameter deformation $\text{SL}_r(n)$. More generally the centrality of the determinant can be achieved by requiring

$$q_{1,i} q_{2,i} \dots q_{i-1,i} \frac{r^2}{q_{i,i+1}} \dots \frac{r^2}{q_{i,n}} = \text{constant} \quad (18)$$

for all $i = 1, \dots, n$. This last requirement results in $n - 1$ conditions among the q_{ij} 's in addition to determining constant $= r^{n-1}$. The number of deformation parameters has been reduced to $N_{\text{SL}} = N_{\text{GL}} - (n - 1) = (n - 1)(n - 2)/2 + 1$.

To give an example consider $\text{SL}_{r^2; q_{ij}}(4)$ with $q_{14} = r^3/q_{12}q_{13}$, $q_{24} = rq_{12}/q_{23}$ and $q_{34} = r/q_{13}q_{23}$.

There are again two ways to impose reality conditions on $\text{GL}(n)$ ($i' \equiv n + 1 - i$):

$$(a) \quad \bar{x}_i = x^i \quad \bar{T} = T \quad q_{ij} = e^{i\theta_{ij}} \quad r^2 = e^{i\Theta} \quad (19)$$

$$(b) \quad \bar{x}_i = x^{i'} \quad \bar{T}_k^i = T_{k'}^{i'} \quad \bar{q}_{ij} = q_{j'i'} \quad r^2 \in \mathbb{R}.$$

giving $\text{GL}_{\Theta; q_{ij}}(n, \mathbb{R})$ and $\text{GL}_{r^2; \bar{q}_{ij}=q_{j'i'}}(n, \mathbb{R})$ and similarly for SL. Deriving the unitary versions is left to the reader.

B_n , C_n , D_n —orthogonal and symplectic groups. For the groups of types B, C, D an additional structure, the metric, has to be implemented in a consistent manner. The metric C defines a length $L = x^i C x$ and provides the orthogonality (or symplectic) relation

$$TC^{-1}T^t C = 1 = C^{-1}T^t CT \quad (20)$$

for quantum matrices T . Roughly speaking, it is the required centrality of the length forcing the metric to be anti-diagonal. (Clearly, it can be diagonalized in the classical limit):

$$C_{ij} = c_i \delta_{ij}, \quad (j' \equiv n + 1 - j) \quad \text{with } c_i c_{i'} = \pm 1. \quad (21)$$

(The last requirement is not necessarily so at this stage but has been made to facilitate the argument; it can be motivated, for example, by consistency of double conjugation, see below (38).) Hence also in the R -matrix a piece containing primed indices appears. We make the following ansatz (motivated by the 'standard' solutions):

$$R_{kl}^{ij} = r \left[\delta_k^i \delta_l^j \left(\frac{1}{q_{ij}} \right) + \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\delta_l^i \delta_k^j \Theta^{ij} + \delta^{ij'} \delta_{kl'} \Theta_k^i a_k^i \right) \right] \quad (22)$$

where Θ is as above and a_k^i are coefficients to be determined. Inserting the orthogonality condition, $T = C^{-1}(T')^{-1}CT$, into the group relations, $RT_1T_2 = T_2T_1R$, it follows that

$$R = C_1^{-1} R^{t_1} C_1 = C_2^{-1} (R^{-1})^{t_2} C_2 \quad (23)$$

implying for (22)

$$R_{kl}^{ij} = \frac{c_i c_j}{c_k c_l} R_{i'j'}^{k'l'} . \quad (24)$$

As in the GL case we have $q_{ii} = 1$ and $q_{jj} = r^2/q_{ij}$ and hence (24) yields

$$q_{ij} = \frac{r^2}{q_{ij'}} = \frac{r^2}{q_{i'j'}} = q_{i'j'} \quad (25)$$

i.e. q_{ij} , $i < j \leq n/2$, give all q 's.

Having fixed the relations among the q 's, one finds that the relations for the a_k^i 's from the YBE decouple. From (24) we get

$$a_k^i = a_{i'}^{k'} \quad (26)$$

and the YBE provides

$$a_j^i a_k^j = -a_k^i \quad (27)$$

and

$$\begin{aligned} a_{n/2}^{n/2+1} &= -1 & \text{or} & & + \frac{1}{r^2} & & n \text{ even} \\ a_{(n-1)/2}^{(n+3)/2} &= -r & & & & & n \text{ odd.} \end{aligned} \quad (28)$$

In combination (26) and (27) are now a recursive set of relations that can be solved using the 'initial conditions' (28). Taking also into account that we have to meet the orthogonality relation (24), one finds $a_k^i = -\epsilon_i \epsilon_k r^{\hat{i}-\hat{k}}$ where \hat{i} are integers determined by the above conditions and the ϵ 's matter only in the symplectic case. Equation (28) yields:

$$\hat{(\dots)} = \begin{cases} (m - \frac{1}{2}, m - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} - m) & \text{for } B_m \\ (m, m - 1, \dots, 1, -1, \dots, 1 - m, -m) & \text{for } C_m \\ (m - 1, m - 2, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, 1 - m) & \text{for } D_m. \end{cases} \quad (29)$$

The c_i 's of the metric have to be chosen as

$$C_{ij} = \epsilon_i r^{\hat{i}} \delta_{ij}, \quad \text{with } \epsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{for } B_m \text{ and } D_m \\ +1 & \text{for } C_m \text{ and } i \leq m \\ -1 & \text{for } C_m \text{ and } i > m \end{cases} \quad (30)$$

thus $c_i c_{i'} = -1$ only for symplectic groups. In the notation of [2] we have:

$$\begin{aligned} R = r \sum_{i \neq i'}^n e_{ii} \otimes e_{ii} + e_{(n+1)/2, (n+1)/2} \otimes e_{(n+1)/2, (n+1)/2} \\ + \sum_{\substack{i < j \\ i \neq j'}}^n \frac{r}{q_{ij}} e_{ii} \otimes e_{jj} + \sum_{\substack{i > j \\ i \neq j'}}^n \frac{q_{ji}}{r} e_{ii} \otimes e_{jj} + \frac{1}{r} \sum_{i \neq i'}^n e_{ii} \otimes e_{i'i'} \\ + \left(r - \frac{1}{r} \right) \left[\sum_{i > j}^n e_{ij} \otimes e_{ji} - \text{sum}_{i > j}^n r^{\hat{i}-\hat{j}} \epsilon_i \epsilon_j e_{ij} \otimes e_{i'j'} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

with (29) and (30). The second term is only present for the B_m case.

Inspection of the classical limits shows the association with the indicated groups. It turns out that the non-diagonal parts of the multiparameter R -matrices coincide with the standard solutions (cf. e.g. [2])—they coincide anyway for all $q_{ij} = r$ —and also the characteristic equation depends only on the Lie algebra deformation parameter r and matches those for the standard solutions ($r = q$) if one normalizes \hat{R} appropriately ($\hat{R}_{ii}^{ii} = 1$):

$$\begin{aligned} \left(\hat{R} - 1 \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\hat{R} - \frac{1}{r^n} \right) = 0 & \quad \text{for } \text{SO}(n) \\ \left(\hat{R} - 1 \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^{n+2}} \right) = 0 & \quad \text{for } \text{Sp}(n). \end{aligned} \quad (32)$$

Remark: Strictly speaking, the orthogonal groups are just $O(n)$ rather than $\text{SO}(n)$, i.e. the determinant is ± 1 . It is, however, possible to use the isomorphy $\text{SO}(n) \simeq O(n)/Z_2$ by identification of pairs of quantum matrices having different sign of the determinants, e.g. $T \sim \text{diag}(-1, 1, 1, \dots) T$. Alternatively one could require the determinant condition explicitly.

Example: $\text{SO}_{r^2, q}(4)$. The two-parameter orthogonal group in four dimensions illustrates the greater generality of multiparameter quantum groups. Since the characteristic equation coincides with that of the standard solutions, so does the projector decomposition of \hat{R} [2]. The relations for the quantum vector space are:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = q x_2 x_1 & \quad x_1 x_3 = \frac{r^2}{q} x_3 x_1 & \quad x_2 x_3 = x_3 x_2 \\ x_2 x_4 = q x_4 x_2 & \quad x_3 x_4 = \frac{r^2}{q} x_4 x_3 & \quad x_1 x_4 = x_4 x_1 - \left(r - \frac{1}{r} \right) x_2 x_3 \end{aligned} \quad (33)$$

and for the exterior coordinates, $(\xi^i)^2 = 0$, we find:

$$\begin{aligned} \xi_1\xi_2 + \frac{q}{r^2}\xi_2\xi_1 &= 0 & \xi_1\xi_3 + \frac{1}{q}\xi_3\xi_1 &= 0 & \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_2 &= \left(r - \frac{1}{r}\right)\xi_1\xi_4 \\ \xi_2\xi_4 + \frac{q}{r^2}\xi_4\xi_2 &= 0 & \xi_3\xi_4 + \frac{1}{q}\xi_4\xi_3 &= 0 & \xi_1\xi_4 + \xi_4\xi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

The metric (21)

$$C = \begin{pmatrix} & & r^{-1} \\ & 1 & \\ r & & \end{pmatrix} \quad (35)$$

gives the central length

$$L = r^{-1}x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + rx_4x_1 = (r + r^{-1})(x_1x_4 + rx_2x_3). \quad (36)$$

Interestingly enough, the two-parameter R -matrix for $\text{SO}(4)$ cannot be constructed as the tensor product of two $\text{SL}(2)$ (unless $q = r$) [10]:

$$R(\text{SO}_{r^2;q}(4)) \neq R(\text{SL}_p(2)) \otimes R(\text{SL}_{p'}(2)). \quad (37)$$

Real versions. Conjugation can be defined trivially $\bar{x} = x$, $\bar{T} = T$, or with help of the metric

$$\bar{x}^i = \bar{x}_i = C_{ik}^i x^k \quad \text{i.e.} \quad \bar{x}_i = c_i x^{i'} \quad (38)$$

$$T^+ = T^{-1} \quad \text{i.e.} \quad \bar{T} = (T^{-1})^t. \quad (39)$$

Compatibility with the quantum group relations can be checked by computing the adjoint of

$$\hat{R} \cdot (T \otimes T) = (T \otimes T) \cdot \hat{R}. \quad (40)$$

One finds

$$\check{R}^+ \cdot (T \otimes T) = (T \otimes T) \cdot \check{R}^+ \quad (41)$$

where $\check{R} = RP$. This holds if the R -matrix obeys

$$\overline{(R_{ij}^{ik})} = R_{kl}^{ji} \quad \text{i.e.} \quad \overline{q_{ij}} q_{ij} = r^2 \in \mathbb{R} \quad \text{or} \quad q_{ij} = r e^{i\theta_{ij}}. \quad (42)$$

The plane deformation parameters q_{ij} exhibit a deformation structure which one could call ‘radial quantization’, where the parameter r provides the modulus for all q ’s combined with an independent phase. Hence, taking real deformation parameters its number stays the same as without reality condition.

In order to investigate the signature of the metric one can define ‘real’ coordinates:

$$y^k = \begin{cases} x^k + c_k x^{k'} & k \leq \frac{n+1}{2} \\ i(c_k x^{k'} - x^k) & k > \frac{n+1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overline{y^k} = y^k. \quad (43)$$

Under this transformation the metric becomes

$$C \rightarrow \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & i\left(c_1 - \frac{1}{c_1}\right) \\ i\left(c_n - \frac{1}{c_n}\right) & 1 + c_n^2 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Since for $r \rightarrow 1$ all c_i become unity, this reality condition gives the quantum groups $\text{SO}_{r^2, \theta_{ij}}(n, \mathbb{R})$.

In the other case $\bar{x} = x$ (thus the coordinates are already 'real') diagonalization of the antidiagonal metric makes us arrive at $\text{SO}_{\theta, \theta_{ij}}(n/2, n/2)$ and $\text{SO}_{\theta, \theta_{ij}}((n+1)/2, (n-1)/2)$ for n even and odd, respectively. Constructing deformed groups of other signature is a more involved topic that needs more complicated R -matrices. For the Lorenz group it is not yet clear whether one or two independent parameters can be found.

Reshetikhin has developed a derivation of multiparameter R -matrices from the standard one-parameter versions employing the universal R -matrix living in the tensor product of an algebra A with itself and having Hopf algebra properties [5]. It can be shown that a second element of the tensor algebra, given in terms of the generators of the Cartan subalgebra of the associated deformed Lie algebra, provides a transformation yielding a new universal R -matrix. By representation the numerical multiparameter R -matrix is constructed.

It is easy, however, to translate this algebraist approach to a simple matrix formalism on the lines of Takhtajan [2] and others omitting the detour to the universal R -matrices [13]: The definition of a Hopf algebra with comultiplication Δ and an universal $R \in A \otimes A$ s.t.

$$(\Delta \otimes \text{id})R = R_{13}R_{23} \quad (\text{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12} \quad \sigma \circ \Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1} \quad (45)$$

implies the Yang-Baxter equation

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (46)$$

which contains all information we need in the R -matrix approach to quantum groups.

Reshetikhin requires for an additional element $F \in A \otimes A$

$$(\Delta \otimes \text{id})F = F_{13}F_{23} \quad (\text{id} \otimes \Delta)F = F_{13}F_{12} \quad F_{12}F_{21} = 1 \quad (47)$$

and also the YBE

$$F_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}F_{12}. \quad (48)$$

Then $R^F \equiv F^{-1}RF^{-1}$ is also a solution of the YBE.

Applying $(\sigma \circ \Delta \otimes \text{id})$ on F in two different ways, firstly letting σ simply interchange the embeddings and secondly using the last equality of (45), one finds:

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \Delta \otimes \text{id})(F) &= \sigma_{12}(F_{13}F_{23}) = F_{23}F_{13} \\ &= R_{12}F_{13}F_{23}R_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (49)$$

i.e.

$$R_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}R_{12} \quad (50)$$

and similarly using $(\text{id} \otimes \sigma \circ \Delta)(F)$

$$F_{12}F_{13}R_{23} = R_{23}F_{13}F_{12}. \quad (51)$$

Like the YBE for R , also those for F and for mixed R and F can now simply be considered as matrix equations. With this 'translation' it needs just a triangular ($F_{12}F_{21} = 1$) solution of the YBE that obeys also (50) and (51) in order to associate a new R -matrix to a given one. (At this stage the construction obviously becomes circular since we need a solution of the YBE in order to find a new one; it turns out, however, that rather trivial solutions help.)

If we choose $F = \text{diag}(f_{11}, f_{12}, \dots, f_{nn})$ with $f_{ij}f_{ji} = 1$, it is easy to show that

$$F^{-1} R(GL_r) F^{-1} = R(GL_{r^2; q_{ij}}) \quad q_{ij} \equiv r f_{ij}^2 \quad (52)$$

i.e. the standard one-parameter deformation is transformed to the multiparameter deformation (16). (In terms of \hat{R} this is a similarity transformation that, however, does not decompose into a simple tensor product $F \neq f \otimes g$.)

By the same means the multiparameter versions of the R -matrices of types B, C, D are related to the standard solutions since, having an additional term of type $\delta^{ij}\delta_{kl}$, equations (50) and (51) require in addition

$$f_{ij} = \frac{1}{f_{ij'}} = \frac{1}{f_{i'j}} = f_{i'j'} \quad (53)$$

which turns out to be equivalent to (25).

This R -matrix formulation also provides a nice way to verify the results of the last section. Using (49), (50) and (51) one can reduce the YBE for R^F to those for R and F alone.

Remark. There are nonetheless additional one-parameter solutions of the YBE that are related to the 'standard' one by a non-diagonal matrix [12,13]. Since the entry structure of these R -matrices is more complicated, more restricting relations of type (53) arise making multiparameter versions almost always impossible.

In accordance with the abstract treatment of Reshetikhin we have explicitly shown, that for groups of type A, B, C, D that $r(r-1)/2+1$ quantization parameters emerge from solving the YBE if r is the rank of the group. It is the maximal number of deformation parameters for quantum groups with the same structure of commutation relation as the standard solutions.

To give an idea of the coherence of multiparameter quantum groups, we note that the fact that $GL(n)$ and $Sp(2n)$ are of the same rank corresponds to the fact that a $2n$ -dimensional phase space built from a n -dimensional linear space (cf Zumino's construction [14]) allow for symplectic transformations also in the deformed case not restricting the possible multiparametric deformation structure.

A many-parameter deformation of a group provides many one-parameter deformations. Thus this letter does not intend to persuade the reader to use always the

most general deformation structure possible but rather points out that different parameter fixings lead to different structures with few or only one parameter having different properties. See, for example, [15] exhibiting that it is the deformation $GL_{1;q}$ rather than the 'standard' deformation $GL_{q^2;q}$ that seems to be suitable to define a path integral.

In general, it will depend on the physical application which deformation structure is appropriate. Hoping that the 'standard' one will do is, however, not justified.

Very fruitful discussions with J Schwenk, K Schmüdgen and A Kempf are acknowledged.

References

- [1] Jimbo M 1986 Quantum R -matrix for the generalized Toda system *Commun. Math. Phys.* **102** 537
- [2] Takhtajan L A 1989 *Quantum Groups and Integrable Models (Advanced Studies in Pure Mathematics 19)* (Tokyo: Kinokuniya) p 435; 1990 Introduction to quantum groups *Quantum Groups (Proceedings, Clausthal 1989)* ed H-D Doebner and J-D Hennig (Berlin: Springer)
- [3] Sudbery A 1990 Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$ *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** L697; 1990 Matrix-element bialgebras determined by quadratic coordinate algebras *Preprint* University of York
- [4] Demidov D D, Manin Yu I, Mukhin E E and Zhdanovich D V 1990 Non-standard quantum deformations of $GL(n)$ and constant solutions of the Yang-Baxter equation *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102**
- [5] Reshetikhin N 1990 Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras *Lett. Math. Phys.* **20** 331
- [6] Schirrmacher A 1991 The multiparametric deformation of $GL(n)$ and the covariant differential calculus on the quantum vector space *Z. Phys. C* **50** 321
- [7] Fairlie D B and Zachos C K 1991 Multiparameter associative generalizations of canonical commutation relations and quantized planes *Phys. Lett.* **256 B** 43
- [8] Schirrmacher A, Wess J and Zumino B 1991 The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and lie algebra *Z. Phys. C* **49** 317
- [9] Zakrzewski S 1991 private communication
- [10] Woronowicz S L and Zakrzewski S Quantum deformations of Lorentz group Hopf- \star -algebra level *Preprint* Warsaw
- [11] Ommela M 1990 private communication
- [12] Cremmer E and Gervais J-L 1990 The quantum group structure associated with non-linearly extended Virasoro algebras *Commun. Math. Phys.* **134** 619
- [13] Ge M-L and Xue K 1991 Exotic solutions of the YBE and the quantum group structures *Quantum Groups* ed T Curtright *et al* (Singapore: World Scientific) p 97
- [14] Kempf A, private communication; 1991 *Proc. XXth DGM Conference (New York, 3-7 June 1991)* (Singapore: World Scientific)
- [15] Zumino B 1991 Deformations of the quantum mechanical phase space with bosonic and fermionic coordinates *Preprint* UCB-PTH-91/1
- [16] Baulieu L and Floratos E G 1990 Path integral on the quantum plane *Preprint* LPTENS 90-34, PAR-LPTHE 90-54

The Structure of $U_q(\text{sl}(2, \mathbf{C}))$

ARNE SCHIRRMACHER

Max-Planck-Institut für Physik, PO Box 401212, 80712 Munich, Germany
 e-mail: ars@dmumpiwh

(Received: 24 June 1993)

Abstract. The structure of the deformation $U_q(\text{sl}(2, \mathbf{C}))$ is discussed. The comultiplication, all commutation relations, and a conjugation follow in a clear way from the simple $\text{SL}_q(2)$ structure. ‘Fundamental’ and spin representation are given.

Mathematics Subject Classifications (1991).

0. A q -deformed Lorentz algebra was derived in [1, 2] by a calculative approach (checking of all consistency requirements) giving a list of relations. We would like to exhibit the structure of this noncommutative quantum algebra $U_q(\text{sl}(2, \mathbf{C}))$ as a *quadratic algebra*. All commutation relations and the comultiplication can be identified with the quantum group structure of $\text{SL}_q(2)$. A natural involution is induced also in terms of *linear* relations. Representations of this algebra into $M(4 \times 4, \mathbf{C})$ related to the defining R -matrix and the spin matrices associated to the q -deformed γ -matrices are obtained. The first one is a faithful representation and can serve as definition of $U_q(\text{sl}(2, \mathbf{C}))$.

1. Let M be a $\text{SL}_q(2)$ quantum matrix [3], $q \in \mathbf{R}$, $\lambda = q - q^{-1}$

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix}, \quad \det_q M = m_1^1 m_2^2 - q m_2^1 m_1^2 = 1, \quad (1)$$

with the commutation relations

$$\begin{aligned} m_1^1 m_2^1 &= q m_2^1 m_1^1, & m_1^1 m_2^2 &= q m_2^2 m_1^1, \\ m_1^2 m_2^1 &= q m_2^2 m_1^1, & m_2^1 m_2^2 &= q m_2^2 m_2^1, \\ m_2^1 m_1^2 &= m_1^2 m_2^1, & m_1^1 m_2^2 &= m_2^2 m_1^1 + \lambda m_2^1 m_1^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Then the comultiplication is generated by matrix multiplication

$$\Delta(M) = M \hat{\otimes} M. \quad (3)$$

There are two ways to give the quantum deformation of $SU_q(2)$:

(a) as one unitary quantum matrix of type (1) generated by

$$\hat{R}MM = MMR\hat{R} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} q & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \lambda & 1 & \cdot \\ & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} \quad (4)$$

and the unitarity condition $M^+M = 1$, i.e.

$$\overline{m_1^1} = m_2^2 \quad \text{and} \quad \overline{m_2^1} = -qm_1^2;$$

or (b) as a pair of upper and lower triangular unimodular quantum matrices \mathcal{L}_+ and \mathcal{L}_- with relations

$$\begin{aligned} \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_+ &= \mathcal{L}_+\mathcal{L}_+\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_-\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_-\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+\hat{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

and unitarity condition $(\mathcal{L}_+)^+ = (\mathcal{L}_-)^{-1}$.

These are known as dual descriptions [3, 4]. It will turn out that this is not necessarily the duality between quantum group and its enveloping algebra $G_q \leftrightarrow U_q(g)$ as also the latter can take the form (a) and vice versa (cf. the Iwasawa decomposition for $SL_q(2, \mathbb{C})$ [5, 6]).

2. The seven generators of the q -Lorentz group [1] can be put into three matrices of type (1) and can be identified with a more suitable set of generators $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ [3, 7]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &\equiv \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ \lambda L^+ & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{-1/4} & 0 \\ q\lambda T^+(\tau^3)^{-1/4} & (\tau^3)^{1/4} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_- &\equiv \begin{pmatrix} l & -q\lambda L^- \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{1/4} & -\lambda/q T^-(\tau^3)^{-1/4} \\ 0 & (\tau^3)^{-1/4} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_b &\equiv \begin{pmatrix} k & -q\lambda K^1 \\ \lambda K^2 & \tilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^1(\tau^3)^{1/4} & \lambda S^1(\tau^3)^{-1/4} \\ \lambda T^2(\tau^3)^{1/4} & \sigma^2(\tau^3)^{-1/4} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

The new choice of generators exhibits a purely quadratic algebra for the quantum Lorentz group. As usual, the analogues of the Cartan subalgebra generators are accompanied by some kind of inverses l^{-1} and \tilde{k} . Since, in the deformed case, the generators of the transformation correspond to finite shifts rather than infinitesimal ones (giving rise to discrete spectra), they can be identified with entries in the quantum matrices corresponding to the deformed Lie group.

The commutation relations of the q -Lorentz algebra are given by the R -matrix Equations (5) for the rotation subalgebra and the following relations

$$\hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_b = \mathcal{L}_b\mathcal{L}_b\hat{R}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_b &= \mathcal{L}_b\mathcal{L}_+\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_b\hat{R}. \end{aligned} \quad (8)$$

While the deformation of the rotation subalgebra is of type (b), the boost containing subalgebra takes the form (a); the remaining relations are given similarly (8).

3. We list now the explicit relations and compare them with those of [1]. We can read off for the rotation subalgebra from (6) using (2)

$$\begin{aligned} L^+l &= qll^+, \\ L^-l &= q^{-1}ll^-, \\ [L^+, L^-] &= q^{-1}\lambda^{-1}(l^{-2} - l^2). \end{aligned} \quad (9)$$

This equates also to

$$\begin{aligned} \tau^3T^+ &= q^{-4}T^+\tau^3, \\ \tau^3T^- &= q^4T^-\tau^3, \\ T^+T^- &= q^2T^-T^+ + q\lambda^{-1}(1 - \tau^3), \end{aligned} \quad (10)$$

as proposed. The relations among rotations and boosts are

$$\begin{aligned} kL^+ &= q^{-1}L^+k + q^{-1}\lambda l^{-1}K^2, & kL^- &= q^{-1}L^-k + q^{-1}\lambda lK^1, \\ \tilde{k}L^+ &= qL^+\tilde{k} - \lambda K^2l, & \tilde{k}L^- &= qL^-\tilde{k} - \lambda K^1l^{-1}, \\ kl &= lk, & \tilde{k}l &= l\tilde{k}, \\ K^1L^+ &= L^+K^1 - q^{-1}\lambda^{-1}(l^{-1}\tilde{k} - lk), & K^1L^- &= L^-K^1, \\ K^2L^+ &= L^+K^2, & K^2L^- &= L^-K^2 + q^{-1}\lambda^{-1}(kl^{-1} - l\tilde{k}), \\ K^1l &= q^{-1}lK^1, & K^2l &= qlK^2, \end{aligned} \quad (11)$$

matching

$$\begin{aligned} \tau^1T^+ &= T^+\tau^1 + \lambda T^2, & \tau^1T^- &= q^{-2}T^-\tau^1 - \lambda S^1, \\ \sigma^2T^+ &= T^+\sigma^2 - q^2\lambda\tau^3T^2, & \sigma^2T^- &= q^2T^-\sigma^2 + q^2\lambda S^1, \\ \tau^1\tau^3 &= \tau^3\tau^1, & \sigma^2\tau^3 &= \tau^3\sigma^2, \\ S^1T^+ &= q^{-2}T^+S^1 - q^{-2}\lambda^{-1}(\tau^3\tau^1 - \sigma^2), & S^1T^- &= T^-S^1, \\ T^2T^+ &= q^2T^+T^2, & T^2T^- &= T^-T^2 + \lambda^{-1}(\tau^1 - \sigma^2), \\ S^1\tau^3 &= q^{-4}\tau^3S^1, & T^2\tau^3 &= q^4\tau^3T^2. \end{aligned} \quad (12)$$

And for the boost containing subalgebra, we find

$$\begin{aligned} kK^1 &= qK^1k, & kK^2 &= qK^2k, \\ \tilde{k}K^1 &= q^{-1}K^1\tilde{k}, & \tilde{k}K^2 &= q^{-1}K^2\tilde{k}, \\ K^1K^2 &= K^2K^1, & k\tilde{k} &= \tilde{k}k - q\lambda^3K^1K^2, \end{aligned} \tag{13}$$

which corresponds to

$$\begin{aligned} \tau^1S^1 &= S^1\tau^1, & \tau^1T^2 &= q^2T^2\tau^1, \\ \sigma^2S^1 &= S^1\sigma^2, & \sigma^2T^2 &= q^{-2}T^2\sigma^2, \\ S^1T^2 &= T^2S^1, & \tau^1\sigma^2 &= \sigma^2\tau^1 + q\lambda^3S^1T^2. \end{aligned} \tag{14}$$

The requirement of unimodularity of \mathcal{L}_b reduces the number of independent generators of Lorentz group to six as discussed in [7], i.e.

$$\begin{aligned} 1 &= \det_q \mathcal{L}_b = k\tilde{k} + q\lambda^2K^1K^2 \\ &= \tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2S^1T^2. \end{aligned} \tag{15}$$

This relation can be used to eliminate \tilde{k} in the same manner as the relation $ll^{-1} = 1$ to eliminate l^{-1} . For the structure and computations, it is of advantage to use the quadratic algebra $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ rather than $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$.

4. The comultiplications is generated by matrix multiplication (3). For the rotation part, one gets

$$\begin{aligned} \Delta(l) &= l \otimes l, \\ \Delta(L^+) &= L^+ \otimes l^{-1} + l \otimes L^+, \\ \Delta(L^-) &= L^- \otimes l + l^{-1} \otimes L^-, \end{aligned} \tag{16}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \Delta(\tau^3) &= \tau^3 \otimes \tau^3, \\ \Delta(T^+) &= T^+ \otimes 1 + (\tau^3)^{1/2} \otimes T^+, \\ \Delta(T^-) &= T^- \otimes 1 + (\tau^3)^{1/2} \otimes T^-, \end{aligned} \tag{17}$$

and for the boost containing part one finds

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= k \otimes k - q\lambda^2K^1 \otimes K^2, \\ \Delta(\tilde{k}) &= \tilde{k} \otimes \tilde{k} - q\lambda^2K^2 \otimes K^1, \\ \Delta(K^1) &= K^1 \otimes \tilde{k} + k \otimes K^1, \\ \Delta(K^2) &= K^2 \otimes k + \tilde{k} \otimes K^2. \end{aligned} \tag{18}$$

which corresponds to

$$\begin{aligned}\Delta(\tau^1) &= \tau^1 \otimes \tau^1 + \lambda^2 S^1 (\tau^3)^{-1/2} \otimes T^2, \\ \Delta(\sigma^2) &= \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \lambda^2 T^2 (\tau^3)^{1/2} \otimes S^1, \\ \Delta(S^1) &= S^1 \otimes \sigma^2 + (\tau^3)^{1/2} \tau^1 \otimes S^1, \\ \Delta(T^2) &= T^2 \otimes \tau^1 + (\tau^3)^{-1/2} \sigma^2 \otimes T^2.\end{aligned}\tag{19}$$

In the new generators the comultiplication takes a simple quadratic form.

5. The involution of the Lorentz algebra simply follows from (crossing) unitarity of \mathcal{L}_+ and \mathcal{L}_- and unitarity of \mathcal{L}_b

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_+)^+ &= (\mathcal{L}_-)^{-1}: \begin{pmatrix} \bar{l}^{-1} & \lambda \bar{L}^+ \\ 0 & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^{-1} & \lambda L^- \\ 0 & l \end{pmatrix}, \\ (\mathcal{L}_b)^+ &= (\mathcal{L}_b)^{-1}: \begin{pmatrix} \bar{k} & \lambda \bar{K}^2 \\ -q\lambda \bar{K}^1 & \bar{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k} & \lambda K^1 \\ -q\lambda K^2 & k \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{20}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\bar{l} &= l, \\ \bar{k} &= k, \\ \bar{L}^+ &= L^-, \\ \bar{K}^1 &= K^2\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\bar{T}^\pm &= q^{\mp 2} T^\mp, \\ \bar{\tau}^3 &= \tau^3, \\ \bar{T}^2 &= -(\tau^3)^{-1/2} S^1, \\ \bar{S}^1 &= -q^2 (\tau^3)^{1/2} T^2, \\ \bar{\tau}^1 &= (\tau^3)^{-1/2} \sigma^2, \\ \bar{\sigma}^2 &= (\tau^3)^{1/2} \tau^1.\end{aligned}\tag{21}$$

Thus, we observe again a simple structure for the proposed choice of generators having linear conjugation relations. By construction, the conjugation is compatible with the relations (9), (11), (13).

6. The quantization of Lie algebras and Lie groups is related via a pairing duality [3, 4]

$$\begin{aligned}\langle . | . \rangle: G_q \otimes U_q(g) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle \mathbf{L}^\pm | \mathbf{T} \rangle &= \mathbf{R}^\pm,\end{aligned}\tag{22}$$

$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^- = P\mathbf{R}^{-1}P$. This gives a representation of the quantum Lorentz algebra in terms of submatrices of the R -matrix of the Lorentz group \mathbf{R} built from the R -matrix of $SL_q(2)$ [8, 7]: $\mathbf{R}_{1234} = R_{23}R_{13}R_{24}R_{14}^{-1}$.^{*} This is sometimes called the ‘fundamental’ or ‘adjoint’ representation for the q -deformed Lie algebra, since one can understand the R -matrix as a matrix of structure constants of the deformed Lie algebra. In terms of the group $SL_q(2, \mathbb{C})$, a vector X^{ab} transforms with $M \times \bar{M}$ ($(A \times B)_{kl}^{ij} = A_k^i B_l^j$). As a consequence we find the decomposition [7]

$$\mathbf{L}_{21}^+ = \mathcal{L}_+ \times \mathcal{L}_b, \quad \mathbf{L}_{21}^- = \mathcal{L}_b \times \mathcal{L}_-. \quad (23)$$

Relations (5), (7), and (8) give the according relations (5) for \mathbf{R} and \mathbf{L}^\pm . From the 18 nonvanishing elements of \mathbf{L}^+ and \mathbf{L}^- , one can isolate the factors and finds the ‘ q -adjoint’ representation

$$\begin{aligned} L^+ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \end{pmatrix}, & L^- &= \begin{pmatrix} \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ l &= \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \end{pmatrix}, & l^{-1} &= \begin{pmatrix} q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \\ K^1 &= \begin{pmatrix} \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & K^2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ k &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, & \tilde{k} &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

This shows that the algebra $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ is from the R -matrix point of view [3] the canonical one. Moreover, this representation is faithful and hence, gives an independent proof that (9), (11), and (13) is the q -deformed Lorentz algebra

*Using a different R -matrix, this method was applied in [9] leading, however, to a complicated structure with infinite power series in the generators; the relation to the algebras discussed here is not evident.

associated to the q -deformed Lorentz group of [8, 5, 1]. It could have been used to introduce $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$.

7. Fields with spin are usually described by multicomponent spinors. The action of Lorentz transformations on spin space can be constructed out of the representations $(\frac{1}{2}, 0)$ and $(0, \frac{1}{2})$. The Dirac representation is the sum of these two. This representation can be found in the quadratic part of the associated Clifford algebra of the quantum Lorentz group [10], $\omega = q + q^{-1}$, g the metric in the basis (A, B, C, D)

$$\sigma^{IJ} = \frac{1}{2} [\gamma^J, \gamma^I]_V = \gamma^J \gamma^I + \frac{q}{\omega} g^{IJ},$$

$$g = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ q^{-2} & . & . & . \\ . & . & -q\lambda & -1 \\ . & . & -1 & . \end{pmatrix}. \quad (25)$$

V is an interchanging operator related to R such that the σ^{IJ} are q -antisymmetric $V\sigma = -\sigma$.

There is an identification with the undeformed γ -matrices

$$\begin{aligned} \gamma^A &= \frac{1}{2q}(\gamma^1 - i\gamma^2), \\ \gamma^B &= \frac{q}{2}(\gamma^1 + i\gamma^2), \\ \gamma^C &= \frac{1}{2}(q^2\gamma^0 + \gamma^3) + \frac{i}{2}(q^2 - 1)\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ \gamma^D &= \frac{1}{2}(\gamma^0 - \gamma^3). \end{aligned} \quad (26)$$

The chiral generators have the representation

$$\begin{aligned} M^+ &\sim q^{-1}\sigma^{BD}, & M^- &\sim q^{-1}\sigma^{AC}, \\ M^3 &\sim -q\sigma^{AB} + q^{-1}\sigma^{CD}, & N^3 &\sim q^{-1}(\sigma^{AB} + \sigma^{CD}), \\ N^+ &\sim q\sigma^{AD}, & N^- &\sim -q^{-3}\sigma^{CB}, \end{aligned} \quad (27)$$

obeying the chiral q -Lorentz algebra introduced in [2]

$$\begin{aligned} q^2M^3M^+ - q^{-2}M^+M^3 &= \omega M^+, \\ q^{-1}M^+M^- - qM^-M^+ &= M^3, \\ q^{-2}M^3M^- - q^2M^-M^3 &= -\omega M^-, \\ q^{-2}N^3N^+ - q^2N^+N^3 &= \omega N^-, \\ qN^+N^- - q^{-1}N^-N^+ &= N^3, \\ q^2N^3N^- - q^{-2}N^-N^3 &= -\omega N^+. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} q^{-1}N^\pm M^\pm - qM^\pm N^\pm &= 0, \\ qN^\pm M^\mp - q^{-1}M^\mp N^\pm &= 0, \\ [M^\pm, N^3] &= 0, \quad [N^\pm, M^3] = 0, \quad [M^3, N^3] = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

The seven generators $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$ in terms of the chiral ones are

$$\begin{aligned} T^+ &= M^+ + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}N^+, \\ T^- &= M^- + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}N^-, \\ \tau^3 &= (1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}, \\ \tau^1 &= (1 - \lambda M^3)^{-1/2}, \\ \sigma^2 &= (1 - \lambda M^3)^{1/2}[1 - q\lambda^2(1 + \lambda N^3)^{-1}]N^- M^+, \\ T^2 &= q^{-1}(1 - \lambda M^3)^{-1/2}M^+, \\ S^1 &= -(1 - \lambda M^3)^{1/2}(1 + \lambda N^3)^{-1}N^-. \end{aligned} \tag{30}$$

Hence, it is easy to give the $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ representation using (27) and a chiral representation of the usual γ -matrices, e.g. take*

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \end{pmatrix}, \\ \tau^3 &= \begin{pmatrix} q^2 & . & . & . \\ . & q^{-2} & . & . \\ . & . & q^{-2} & . \\ . & . & . & q^2 \end{pmatrix}, \\ T^+ &= \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & -q^{-1} \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & -q & . \end{pmatrix}, \\ S^1 &= \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{31}$$

*The matrices γ^2 and γ^3 have a unusual sign to make (31) agree with the action of the generators on spinors as used in [1].

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} q^{-1} & & & & \\ & q & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} q & & & & \\ & q^{-1} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Representations or higher spin follow by use of the comultiplication on q -symmetrized spinors.

Using the relations (6), the spin representation for the new generators is

$$\begin{aligned} L^+ &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & & & & \\ & q & & & \\ & & & & \\ & & & & -1 \\ & & & & \end{pmatrix}, & L^- &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & q^{-1} & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \\ l &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & q & \\ & & & & \end{pmatrix}, & l^{-1} &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & q & & & \\ & & q & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \\ K^1 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & -1 \\ & & & & \end{pmatrix}, & K^2 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} & & & & \\ & q & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \\ k &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & q & & & \\ & & 1 & & \\ & & & q & \\ & & & & \end{pmatrix}, & \tilde{k} &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & & & & \\ & 1 & & & \\ & & q & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{32}$$

The conjugation on this representation is given as follows. The Dirac spinor is of type $\psi^t = (x, y, -q^{1/2}\bar{y}, q^{-1/2}\bar{x})$, where x and y span a complex quantum plane [1]. Then the involution is given using the spinor metric ε

$$\psi^* = S\psi, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ -q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

For the matrix representation, we thus have for L any generator in the Dirac representation

$$L^+ \equiv (\bar{L})^t = SLS^{-1} \quad (34)$$

which agrees with the relations (21).

References

1. Schmidke, W. B., Wess, J., and Zumino, B., A q -deformed Lorentz Algebra, *Z. Phys. C* **52**, 471 (1991).
2. Ogievetsky, O., Schmidke, W. B., Wess, J., and Zumino, B., Six generator q -deformed Lorentz algebra, *Lett. Math. Phys.* **23**, 233 (1991).
3. Reshetikhin, N. Yu., Takhtadzhyan, L. A., and Faddeev, L. D., Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.* **1**, 193 (1990).
4. Majid, S., Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations, *Internat. J. Modern Phys.* **5**, 1 (1990).
5. Podles, P. and Woronowicz, S. L., Quantum deformation of Lorentz group, *Comm. Math. Phys.* **133**, 381 (1990).
6. Takeuchi, M., Finite dimensional representations of the quantum Lorentz group, *Comm. Math. Phys.* **144**, 557 (1992).
7. Schirrmacher, A., Aspects of quantising Lorentz symmetry, in J. Fröhlich *et al.* (eds) *New Symmetry Principles in Quantum Field Theory*, Cargèse, NATO ASI B295, Plenum, London, New York, 1992, pp. 505–512.
8. Carow-Watamura, U., Schlieker, M., Scholl, M., and Watamura, S., A quantum Lorentz group, *Internat. J. Modern Phys. A* **6**, 3081 (1991).
9. Drabant, B., Schlieker, M., Weich, W., and Zumino, B., Complex quantum groups and their quantum enveloping algebras, in R. Gielerak *et al.* (eds), *Quantum Groups and Related Topics*, Math. Phys. Stud. **13**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, pp. 13–22.
10. Schirrmacher, A., Quantum groups, quantum spacetime, and the Dirac equation, in H. Osborn (ed), *Low-Dimensional Topology and Quantum Field Theory*, Cambridge, NATO ASI, Plenum, London, New York, 1993, pp. 221–230.

LETTER TO THE EDITOR

Multiparameter R -matrices and their quantum groups

Arne Schirrmacher

Max-Planck-Institut für Physik, Werner-Heisenberg-Institut, PO Box 40 12 12, Munich,
Federal Republic of Germany

Received 7 May 1991

Abstract. Multiparameter solutions of the Yang–Baxter equation associated with the groups of types A, B, C, D are given as generalizations of the well known one-parameter solutions. The R -matrix approach to quantum groups used here is related to the algebraic one of Reshetikhin.

Much has been said about quantum groups based on the so-called standard solutions of the (quantum) Yang–Baxter equation (YBE) [1, 2] while on multiparameter quantum groups only a small number of publications is at hand [3–7]. In this letter it is shown that there exist natural multiparametric generalizations of the standard solutions.

A simple example [8] will be used to introduce notation and to distinguish different types of deformation parameters. The main part of this letter presents multiparametric R -matrix solutions of the YBE associated with the groups of types A, B, C, D, and shows how they are obtained by explicitly solving the YBE. These results are then related to the algebraic approach of Reshetikhin [5] by translating it to a ‘Hopf algebra free’ formulation of the R -matrix approach of Takhtajan and others [2]. We conclude with some remarks on the prospects of multiparameter quantum groups and its applications.

As in ordinary group theory there are three structures that are related by a quantum group: the group itself given as a matrix of non-commuting entries, a coordinate space transformed by the group action, and the Lie algebra associated to the group that is in general also deformed. The commutation relations can be represented most simply using the R -matrix. Let us consider the two-dimensional general linear group as an example ($R \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$):

	notation	relations
quantum group	$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12}$
quantum plane	$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$(\hat{R} - 1)(\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}) = 0$
quantum Lie algebra	T^\pm, H, K	$R_{12}L_2^\pm L_1^\pm = L_1^\pm L_2^\pm R_{12}$ $R_{12}L_2^+ L_1^- = L_1^- L_2^+ R_{12}$

where $\hat{R} = PR$, P is the permutation matrix, the normalization s.t. $\hat{R}_{ii}^{ii} = 1$, and L^\pm are matrix functionals of the generators T^\pm, H, K .

It has been shown, that if one starts with choosing a q -plane

$$xy = qyx \quad (2)$$

and a deformation of the Lie algebra relations of $gl(2)$ with parameter r

$$[T^+, T^-] = [H]_r \equiv \frac{r^H - r^{-H}}{r - r^{-1}} \quad [T^\pm, H] = \pm T^\pm \quad [K, \dots] = 0 \quad (3)$$

this corresponds to the following R -matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 1/r^2 & q/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

The matrix functionals are in this case:

$$L^+ = \begin{pmatrix} p^{(H+K)/2} & 0 \\ (r-1/r) \tilde{T}^+ & q^{(-H+K)/2} \end{pmatrix} \quad L^- = \begin{pmatrix} q^{-(H+K)/2} & -(r-1/r) \tilde{T}^- \\ 0 & p^{(H-K)/2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

where $p \equiv r^2/q$, $\tilde{T}^+ \equiv (q/r)^{H/2} T^+$, $\tilde{T}^- \equiv T^- (q/r)^{H/2}$.

The group deformation then is to be:

$$\begin{aligned} ab &= \frac{r^2}{q} ba & cd &= \frac{r^2}{q} dc & bc &= \frac{q^2}{r^2} cb \\ ac &= q ca & bd &= q db & ad - da &= \frac{r^2 - 1}{q} bc \end{aligned} \quad (6)$$

which is the two-parameter deformation of $GL(2)$. A second quantum plane of exterior variables ξ , η , that can be interpreted as differentials of x and y , is also determined:

$$\xi\eta = -\frac{q}{r^2} \eta\xi. \quad (7)$$

The determinant can be defined and becomes central for $q = r$ which allows us to define $SL_q(2)$. (For details see [8], note the different notations for the second parameter r , $X = r^2$, or $p = r^2/q$.)

The underlying field for the coefficients has tacitly been assumed to be C and 'real' versions of the group can be obtained by giving an appropriate conjugation. There are, however, two ways to do this:

$$\begin{aligned} (a) \quad \bar{x} &= y & \bar{y} &= x \\ (b) \quad \bar{x} &= x & \bar{y} &= y. \end{aligned} \quad (8)$$

Since we require $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$ the plane relations give:

$$\begin{aligned} xy &= qxy \longrightarrow & (a) \quad xy &= \bar{q}yx \\ & & (b) \quad xy &= \frac{1}{q}yx. \end{aligned} \quad (9)$$

For the group parameters conjugation has to be:

$$(a) \quad \bar{T} = STS = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(b) \quad \bar{T} = T$$

and hence

$$ab = \frac{r^2}{q} ba \longrightarrow (a) \quad d = \frac{\bar{r}^2}{\bar{q}} dc \quad \text{etc} \quad (11)$$

$$(b) \quad ab = \frac{\bar{q}}{r^2} ba \quad \text{etc}$$

yielding for the parameters

$$(a) \quad q, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (12)$$

$$(b) \quad q = e^{i\vartheta} \quad r^2 = e^{i\Theta} \quad \vartheta, \Theta \in \mathbb{R}.$$

i.e. both deformation parameters are either real or pure phases. These groups may be denoted as $GL_{r^2, q}(2, \mathbb{R})$ and $GL_{\Theta, \vartheta}(2, \mathbb{R})$, respectively.

Unitary groups can be found by requiring

$$T^+ = T^{-1} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -pc \\ -b/p & a \end{pmatrix} D^{-1} \quad (13)$$

giving the group $U_{r^2, q}(2)$, where $q = r e^{i\vartheta}$, and $SU_r(2)$, where $q = r \in \mathbb{R}$, with two and one real deformation parameters, respectively. ($D = ad - qc$ is the determinant [8].) This can be seen from, for example,

$$ac = q ca \longrightarrow bd D^{-1} d D^{-1} = \bar{q} d D^{-1} b D^{-1} \Rightarrow bd = \bar{q} \frac{q^2}{r^2} db \quad (= q db!) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \bar{q} q = r^2.$$

Remark. In this paper we do not consider Hopf-* algebra quantum groups of an extended algebra with barred and unbarred generators providing mixed commutation relations. For distinction we write $GL(2)$ instead of $GL(2, \mathbb{C})$. Such extensions are in general not difficult to find but not necessarily unique [9].

The procedure followed in the last section generalizes for $GL(n)$ and with some restrictions also for $SL(n)$, i.e. A_{n-1} . Similarly one can proceed for the classical series of semi-simple groups B_n , C_n , D_n , i.e. $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$, $SO(2n)$.

A_{n-1} —the groups $GL(n)$ and $SL(n)$. As in the two-dimensional case the Lie algebra has still one deformation parameter; the quantum space relations, however, can be chosen to be deformed more generally:

$$x^i x^j = q_{ij} x^j x^i \quad i < j \quad (15)$$

providing a total of $N_{\text{GL}} = n(n - 1)/2 + 1$ parameters (q_{ij} and r) for the corresponding R -matrix ($\mathbf{R} = R_{kl}^{ij} e_i^k \otimes e_j^l$):

$$R_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j \left(\delta^{ij} + \Theta^{ii} \frac{1}{q_{ij}} + \Theta^{ij} \frac{q_{ji}}{r^2} \right) + \delta_l^i \delta_k^j \Theta^{ij} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \quad (16)$$

where Θ^{ij} equals 1 for $i > j$ and zero otherwise. Note, no summation over repeated indices is involved here. The group relations given by this R -matrix are not difficult to work out and can be found in [6].

To arrive at the quantized $\text{SL}(n)$ from $\text{GL}_{r^2; q_{ij}}(n)$ it is necessary to make the determinant \mathcal{D} central before it can consistently be identified with unity. In the GL case the determinant has the following property [6]:

$$T_k^i \mathcal{D} = \frac{\prod_{\alpha=1}^{k-1} q_{\alpha k} \prod_{\gamma=k+1}^n (r^2/q_{k\gamma})}{\prod_{\beta=1}^{i-1} q_{\beta i} \prod_{\delta=i+1}^n (r^2/q_{i\delta})} \mathcal{D} T_k^i. \quad (17)$$

In order to render the factor picked up to unity, one can simply choose all q 's equal to r . This gives the well known one-parameter deformation $\text{SL}_r(n)$. More generally the centrality of the determinant can be achieved by requiring

$$q_{1,i} q_{2,i} \cdots q_{i-1,i} \frac{r^2}{q_{i,i+1}} \cdots \frac{r^2}{q_{i,n}} = \text{constant} \quad (18)$$

for all $i = 1, \dots, n$. This last requirement results in $n-1$ conditions among the q_{ij} 's in addition to determining constant $= r^{n-1}$. The number of deformation parameters has been reduced to $N_{\text{SL}} = N_{\text{GL}} - (n-1) = (n-1)(n-2)/2 + 1$.

To give an example consider $\text{SL}_{r^2; q_{ij}}(4)$ with $q_{14} = r^3/q_{12}q_{13}$, $q_{24} = rq_{12}/q_{23}$ and $q_{34} = r/q_{13}q_{23}$.

There are again two ways to impose reality conditions on $\text{GL}(n)$ ($i' \equiv n+1-i$):

$$(a) \quad \bar{x}_i = x^i \quad \bar{T} = T \quad q_{ij} = e^{i\theta_{ij}} \quad r^2 = e^{i\Theta} \quad (19)$$

$$(b) \quad \bar{x}_i = x^{i'} \quad \bar{T}_k^i = T_{k'}^{i'} \quad \bar{q}_{ij} = q_{j'i'} \quad r^2 \in \mathbb{R}.$$

giving $\text{GL}_{\Theta; q_{ij}}(n, \mathbb{R})$ and $\text{GL}_{r^2; \bar{q}_{ij}=q_{j'i'}}(n, \mathbb{R})$ and similarly for SL. Deriving the unitary versions is left to the reader.

B_n , C_n , D_n —orthogonal and symplectic groups. For the groups of types B, C, D an additional structure, the metric, has to be implemented in a consistent manner. The metric C defines a length $L = x^i C x$ and provides the orthogonality (or symplectic) relation

$$TC^{-1}T^i C = 1 = C^{-1}T^i CT \quad (20)$$

for quantum matrices T . Roughly speaking, it is the required centrality of the length forcing the metric to be anti-diagonal. (Clearly, it can be diagonalized in the classical limit):

$$C_{ij} = c_i \delta_{ij}, \quad (j' \equiv n+1-j) \quad \text{with } c_i c_{i'} = \pm 1. \quad (21)$$

(The last requirement is not necessarily so at this stage but has been made to facilitate the argument; it can be motivated, for example, by consistency of double conjugation, see below (38).) Hence also in the R -matrix a piece containing primed indices appears. We make the following ansatz (motivated by the 'standard' solutions):

$$R_{kl}^{ij} = r \left[\delta_k^i \delta_l^j \left(\frac{1}{q_{ij}} \right) + \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\delta_l^i \delta_k^j \Theta^{ij} + \delta^{ij'} \delta_{kl'} \Theta_k^i a_k^{i'} \right) \right] \quad (22)$$

where Θ is as above and a_k^i are coefficients to be determined. Inserting the orthogonality condition, $T = C^{-1}(T^t)^{-1}CT$, into the group relations, $RT_1T_2 = T_2T_1R$, it follows that

$$R = C_1^{-1} R^{t_1} C_1 = C_2^{-1} (R^{-1})^{t_2} C_2 \quad (23)$$

implying for (22)

$$R_{kl}^{ij} = \frac{c_i c_j}{c_k c_l} R_{i'j'}^{k'l'} . \quad (24)$$

As in the GL case we have $q_{ii} = 1$ and $q_{jj} = r^2/q_{ij}$ and hence (24) yields

$$q_{ij} = \frac{r^2}{q_{i'j'}} = \frac{r^2}{q_{i'j'}} = q_{i'j'}, \quad (25)$$

i.e. q_{ij} , $i < j \leq n/2$, give all q 's.

Having fixed the relations among the q 's, one finds that the relations for the a_k^i 's from the YBE decouple. From (24) we get

$$a_k^i = a_{i'}^{k'} \quad (26)$$

and the YBE provides

$$a_j^i a_k^j = -a_k^i \quad (27)$$

and

$$\begin{aligned} a_{n/2}^{n/2+1} &= -1 & \text{or} & & + \frac{1}{r^2} & \quad n \text{ even} \\ a_{(n-1)/2}^{(n+3)/2} &= -r & & & & \quad n \text{ odd.} \end{aligned} \quad (28)$$

In combination (26) and (27) are now a recursive set of relations that can be solved using the 'initial conditions' (28). Taking also into account that we have to meet the orthogonality relation (24), one finds $a_k^i = -\epsilon_i \epsilon_k r^{\hat{i}-\hat{k}}$ where \hat{i} are integers determined by the above conditions and the ϵ 's matter only in the symplectic case. Equation (28) yields:

$$(\hat{1} \dots) = \begin{cases} (m - \frac{1}{2}, m - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} - m) & \text{for } B_m \\ (m, m - 1, \dots, 1, -1, \dots, 1 - m, -m) & \text{for } C_m \\ (m - 1, m - 2, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, 1 - m) & \text{for } D_m. \end{cases} \quad (29)$$

The c_i 's of the metric have to be chosen as

$$C_{ij} = \epsilon_i r^{\hat{i}} \delta_{ij}, \quad \text{with } \epsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{for } B_m \text{ and } D_m \\ +1 & \text{for } C_m \text{ and } i \leq m \\ -1 & \text{for } C_m \text{ and } i > m \end{cases} \quad (30)$$

thus $c_i c_{i'} = -1$ only for symplectic groups. In the notation of [2] we have:

$$\begin{aligned} R = r \sum_{i \neq i'}^n e_{ii} \otimes e_{ii} + e_{(n+1)/2, (n+1)/2} \otimes e_{(n+1)/2, (n+1)/2} \\ + \sum_{\substack{i < j \\ i \neq j'}}^n \frac{r}{q_{ij}} e_{ii} \otimes e_{jj} + \sum_{\substack{i > j \\ i \neq j'}}^n \frac{q_{ji}}{r} e_{ii} \otimes e_{jj} + \frac{1}{r} \sum_{i \neq i'}^n e_{ii} \otimes e_{i'i'} \\ + \left(r - \frac{1}{r} \right) \left[\sum_{i > j}^n e_{ij} \otimes e_{ji} - \text{sum}_{i > j}^n r^{\hat{i}-\hat{j}} \epsilon_i \epsilon_j e_{ij} \otimes e_{i'j'} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

with (29) and (30). The second term is only present for the B_m case.

Inspection of the classical limits shows the association with the indicated groups. It turns out that the non-diagonal parts of the multiparameter R -matrices coincide with the standard solutions (cf. e.g. [2])—they coincide anyway for all $q_{ij} = r$ —and also the characteristic equation depends only on the Lie algebra deformation parameter r and matches those for the standard solutions ($r = q$) if one normalizes \hat{R} appropriately ($\hat{R}_{ii}^{ii} = 1$):

$$\begin{aligned} \left(\hat{R} - 1 \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\hat{R} - \frac{1}{r^n} \right) = 0 & \quad \text{for } \text{SO}(n) \\ \left(\hat{R} - 1 \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^{n+2}} \right) = 0 & \quad \text{for } \text{Sp}(n). \end{aligned} \quad (32)$$

Remark: Strictly speaking, the orthogonal groups are just $O(n)$ rather than $\text{SO}(n)$, i.e. the determinant is ± 1 . It is, however, possible to use the isomorphy $\text{SO}(n) \simeq O(n)/Z_2$ by identification of pairs of quantum matrices having different sign of the determinants, e.g. $T \sim \text{diag}(-1, 1, 1, \dots) T$. Alternatively one could require the determinant condition explicitly.

Example: $\text{SO}_{r^2, q}(4)$. The two-parameter orthogonal group in four dimensions illustrates the greater generality of multiparameter quantum groups. Since the characteristic equation coincides with that of the standard solutions, so does the projector decomposition of \hat{R} [2]. The relations for the quantum vector space are:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = q x_2 x_1 & \quad x_1 x_3 = \frac{r^2}{q} x_3 x_1 & \quad x_2 x_3 = x_3 x_2 \\ x_2 x_4 = q x_4 x_2 & \quad x_3 x_4 = \frac{r^2}{q} x_4 x_3 & \quad x_1 x_4 = x_4 x_1 - \left(r - \frac{1}{r} \right) x_2 x_3 \end{aligned} \quad (33)$$

and for the exterior coordinates, $(\xi^i)^2 = 0$, we find:

$$\begin{aligned} \xi_1\xi_2 + \frac{q}{r^2}\xi_2\xi_1 &= 0 & \xi_1\xi_3 + \frac{1}{q}\xi_3\xi_1 &= 0 & \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_2 &= \left(r - \frac{1}{r}\right)\xi_1\xi_4 \\ \xi_2\xi_4 + \frac{q}{r^2}\xi_4\xi_2 &= 0 & \xi_3\xi_4 + \frac{1}{q}\xi_4\xi_3 &= 0 & \xi_1\xi_4 + \xi_4\xi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

The metric (21)

$$C = \begin{pmatrix} & & r^{-1} \\ & 1 & \\ r & & \end{pmatrix} \quad (35)$$

gives the central length

$$L = r^{-1}x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + rx_4x_1 = (r + r^{-1})(x_1x_4 + rx_2x_3). \quad (36)$$

Interestingly enough, the two-parameter R -matrix for $\text{SO}(4)$ cannot be constructed as the tensor product of two $\text{SL}(2)$ (unless $q = r$) [10]:

$$R(\text{SO}_{r^2;q}(4)) \neq R(\text{SL}_p(2)) \otimes R(\text{SL}_{p'}(2)). \quad (37)$$

Real versions. Conjugation can be defined trivially $\bar{x} = x$, $\bar{T} = T$, or with help of the metric

$$\bar{x}^i = \bar{x}_i = C_{ik}^t x^k \quad \text{i.e.} \quad \bar{x}_i = c_{it} x^{i'} \quad (38)$$

$$T^+ = T^{-1} \quad \text{i.e.} \quad \bar{T} = (T^{-1})^t. \quad (39)$$

Compatibility with the quantum group relations can be checked by computing the adjoint of

$$\hat{R} \cdot (T \otimes T) = (T \otimes T) \cdot \hat{R}. \quad (40)$$

One finds

$$\check{R}^+ \cdot (T \otimes T) = (T \otimes T) \cdot \check{R}^+ \quad (41)$$

where $\check{R} = RP$. This holds if the R -matrix obeys

$$\overline{(R_{ij}^{lk})} = R_{kl}^{ji} \quad \text{i.e.} \quad \overline{q_{ij}} q_{ij} = r^2 \in \mathbf{R} \quad \text{or} \quad q_{ij} = r e^{i\vartheta_{ij}}. \quad (42)$$

The plane deformation parameters q_{ij} exhibit a deformation structure which one could call ‘radial quantization’, where the parameter r provides the modulus for all q ’s combined with an independent phase. Hence, taking real deformation parameters its number stays the same as without reality condition.

In order to investigate the signature of the metric one can define ‘real’ coordinates:

$$y^k = \begin{cases} x^k + c_k x^{k'} & k \leq \frac{n+1}{2} \\ i(c_k x^{k'} - x^k) & k > \frac{n+1}{2} \end{cases} \implies \overline{y^k} = y^k. \quad (43)$$

Under this transformation the metric becomes

$$C \longrightarrow \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & i\left(c_1 - \frac{1}{c_1}\right) \\ i\left(c_n - \frac{1}{c_n}\right) & 1 + c_n^2 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Since for $r \rightarrow 1$ all c_i become unity, this reality condition gives the quantum groups $\text{SO}_{r^2, \vartheta_{ij}}(n, \mathbb{R})$.

In the other case $\tilde{x} = x$ (thus the coordinates are already ‘real’) diagonalization of the antidiagonal metric makes us arrive at $\text{SO}_{\Theta, \vartheta_{ij}}(n/2, n/2)$ and $\text{SO}_{\Theta, \vartheta_{ij}}((n+1)/2, (n-1)/2)$ for n even and odd, respectively. Constructing deformed groups of other signature is a more involved topic that needs more complicated R -matrices. For the Lorenz group it is not yet clear whether one or two independent parameters can be found.

Reshetikhin has developed a derivation of multiparameter R -matrices from the standard one-parameter versions employing the universal R -matrix living in the tensor product of an algebra A with itself and having Hopf algebra properties [5]. It can be shown that a second element of the tensor algebra, given in terms of the generators of the Cartan subalgebra of the associated deformed Lie algebra, provides a transformation yielding a new universal R -matrix. By representation the numerical multiparameter R -matrix is constructed.

It is easy, however, to translate this algebraist approach to a simple matrix formalism on the lines of Takhtajan [2] and others omitting the detour to the universal R -matrices [13]: The definition of a Hopf algebra with comultiplication Δ and an universal $R \in A \otimes A$ s.t.

$$(\Delta \otimes \text{id})R = R_{13}R_{23} \quad (\text{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12} \quad \sigma \circ \Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1} \quad (45)$$

implies the Yang–Baxter equation

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (46)$$

which contains all information we need in the R -matrix approach to quantum groups.

Reshetikhin requires for an additional element $F \in A \otimes A$

$$(\Delta \otimes \text{id})F = F_{13}F_{23} \quad (\text{id} \otimes \Delta)F = F_{13}F_{12} \quad F_{12}F_{21} = 1 \quad (47)$$

and also the YBE

$$F_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}F_{12}. \quad (48)$$

Then $R^F \equiv F^{-1}RF^{-1}$ is also a solution of the YBE.

Applying $(\sigma \circ \Delta \otimes \text{id})$ on F in two different ways, firstly letting σ simply interchange the embeddings and secondly using the last equality of (45), one finds:

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \Delta \otimes \text{id})(F) &= \sigma_{12}(F_{13}F_{23}) = F_{23}F_{13} \\ &= R_{12}F_{13}F_{23}R_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (49)$$

i.e.

$$R_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}R_{12} \quad (50)$$

and similarly using $(\text{id} \otimes \sigma \circ \Delta)(F)$

$$F_{12}F_{13}R_{23} = R_{23}F_{13}F_{12} . \quad (51)$$

Like the YBE for R , also those for F and for mixed R and F can now simply be considered as matrix equations. With this 'translation' it needs just a triangular ($F_{12}F_{21} = 1$) solution of the YBE that obeys also (50) and (51) in order to associate a new R -matrix to a given one. (At this stage the construction obviously becomes circular since we need a solution of the YBE in order to find a new one; it turns out, however, that rather trivial solutions help.)

If we choose $F = \text{diag}(f_{11}, f_{12}, \dots, f_{nn})$ with $f_{ij}f_{ji} = 1$, it is easy to show that

$$F^{-1} R(GL_r) F^{-1} = R(GL_{r^2; q_{ij}}) \quad q_{ij} \equiv r f_{ij}^2 \quad (52)$$

i.e. the standard one-parameter deformation is transformed to the multiparameter deformation (16). (In terms of \tilde{R} this is a similarity transformation that, however, does not decompose into a simple tensor product $F \neq f \otimes g$.)

By the same means the multiparameter versions of the R -matrices of types B, C, D are related to the standard solutions since, having an additional term of type $\delta^{ij}\delta_{kl}$, equations (50) and (51) require in addition

$$f_{ij} = \frac{1}{f_{ij'}} = \frac{1}{f_{i'j}} = f_{i'j'} \quad (53)$$

which turns out to be equivalent to (25).

This R -matrix formulation also provides a nice way to verify the results of the last section. Using (49), (50) and (51) one can reduce the YBE for R^F to those for R and F alone.

Remark. There are nonetheless additional one-parameter solutions of the YBE that are related to the 'standard' one by a non-diagonal matrix [12,13]. Since the entry structure of these R -matrices is more complicated, more restricting relations of type (S3) arise making multiparameter versions almost always impossible.

In accordance with the abstract treatment of Reshetikhin we have explicitly shown, that for groups of type A, B, C, D that $r(r-1)/2+1$ quantization parameters emerge from solving the YBE if r is the rank of the group. It is the maximal number of deformation parameters for quantum groups with the same structure of commutation relation as the standard solutions.

To give an idea of the coherence of multiparameter quantum groups, we note that the fact that $GL(n)$ and $Sp(2n)$ are of the same rank corresponds to the fact that a $2n$ -dimensional phase space built from a n -dimensional linear space (cf Zumino's construction [14]) allow for symplectic transformations also in the deformed case not restricting the possible multiparametric deformation structure.

A many-parameter deformation of a group provides many one-parameter deformations. Thus this letter does not intend to persuade the reader to use always the

most general deformation structure possible but rather points out that different parameter fixings lead to different structures with few or only one parameter having different properties. See, for example, [15] exhibiting that it is the deformation $GL_{1,q}$ rather than the 'standard' deformation $GL_{q^2,q}$ that seems to be suitable to define a path integral.

In general, it will depend on the physical application which deformation structure is appropriate. Hoping that the 'standard' one will do is, however, not justified.

Very fruitful discussions with J Schwenk, K Schmüdgen and A Kempf are acknowledged.

References

- [1] Jimbo M 1986 Quantum R -matrix for the generalized Toda system *Commun. Math. Phys.* **102** 537
- [2] Takhtajan L A 1989 *Quantum Groups and Integrable Models (Advanced Studies in Pure Mathematics 19)* (Tokyo: Kinokuniya) p 435; 1990 Introduction to quantum groups *Quantum Groups (Proceedings, Clausthal 1989)* ed H-D Doebner and J-D Hennig (Berlin: Springer)
- [3] Sudbery A 1990 Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$ *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** L697; 1990 Matrix-element bialgebras determined by quadratic coordinate algebras *Preprint* University of York
- [4] Demidov D D, Manin Yu I, Mukhin E E and Zhdanovich D V 1990 Non-standard quantum deformations of $GL(n)$ and constant solutions of the Yang-Baxter equation *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102**
- [5] Reshetikhin N 1990 Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras *Lett. Math. Phys.* **20** 331
- [6] Schirrmacher A 1991 The multiparametric deformation of $GL(n)$ and the covariant differential calculus on the quantum vector space *Z. Phys. C* **50** 321
- [7] Fairlie D B and Zachos C K 1991 Multiparameter associative generalizations of canonical commutation relations and quantized planes *Phys. Lett.* **256 B** 43
- [8] Schirrmacher A, Wess J and Zumino B 1991 The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and lie algebra *Z. Phys. C* **49** 317
- [9] Zakrzewski S 1991 private communication
- [10] Woronowicz S L and Zakrzewski S Quantum deformations of Lorentz group Hopf- \ast -algebra level *Preprint* Warsaw
- [11] Ommelka M 1990 private communication
- [12] Cremmer E and Cervais J-L 1990 The quantum group structure associated with non-linearly extended Virasoro algebras *Commun. Math. Phys.* **134** 619
- [13] Ge M-L and Xue K 1991 Exotic solutions of the YBE and the quantum group structures *Quantum Groups* ed T Curtright *et al* (Singapore: World Scientific) p 97
- [14] Kempf A, private communication; 1991 *Proc. XXth DGM Conference (New York, 3-7 June 1991)* (Singapore: World Scientific)
- [15] Zumino B 1991 Deformations of the quantum mechanical phase space with bosonic and fermionic coordinates *Preprint* UCB-PTH-91/1
- [16] Baulieu L and Floratos E G 1990 Path integral on the quantum plane *Preprints* LPTENS 90-34, PAR-LPTHE 90-54

The Structure of $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$

ARNE SCHIRRMACHER

Max-Planck-Institut für Physik, PO Box 401212, 80712 Munich, Germany
 e-mail: ars@dmumpiwh

(Received: 24 June 1993)

Abstract. The structure of the deformation $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$ is discussed. The comultiplication, all commutation relations, and a conjugation follow in a clear way from the simple $\text{SL}_q(2)$ structure. ‘Fundamental’ and spin representation are given.

Mathematics Subject Classifications (1991).

0. A q -deformed Lorentz algebra was derived in [1, 2] by a calculative approach (checking of all consistency requirements) giving a list of relations. We would like to exhibit the structure of this noncommutative quantum algebra $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$ as a *quadratic algebra*. All commutation relations and the comultiplication can be identified with the quantum group structure of $\text{SL}_q(2)$. A natural involution is induced also in terms of *linear* relations. Representations of this algebra into $M(4 \times 4, \mathbb{C})$ related to the defining R -matrix and the spin matrices associated to the q -deformed γ -matrices are obtained. The first one is a faithful representation and can serve as definition of $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$.

1. Let M be a $\text{SL}_q(2)$ quantum matrix [3], $q \in \mathbb{R}$, $\lambda = q - q^{-1}$

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix}, \quad \det_q M = m_1^1 m_2^2 - q m_2^1 m_1^2 = 1, \quad (1)$$

with the commutation relations

$$\begin{aligned} m_1^1 m_2^1 &= q m_2^1 m_1^1, & m_1^1 m_1^2 &= q m_1^2 m_1^1, \\ m_1^2 m_2^2 &= q m_2^2 m_1^2, & m_2^1 m_2^2 &= q m_2^2 m_2^1, \\ m_2^1 m_1^2 &= m_1^2 m_2^1, & m_1^1 m_2^2 &= m_2^2 m_1^1 + \lambda m_2^1 m_1^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Then the comultiplication is generated by matrix multiplication

$$\Delta(M) = M \dot{\otimes} M. \quad (3)$$

There are two ways to give the quantum deformation of $SU_q(2)$:

(a) as one unitary quantum matrix of type (1) generated by

$$\hat{R}MM = MMR \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} q & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \lambda & 1 & \cdot \\ & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} \quad (4)$$

and the unitarity condition $M^+M = 1$, i.e.

$$\overline{m_1^1} = m_2^2 \quad \text{and} \quad \overline{m_2^1} = -qm_1^2;$$

or (b) as a pair of upper and lower triangular unimodular quantum matrices \mathcal{L}_+ and \mathcal{L}_- with relations

$$\begin{aligned} \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_+ &= \mathcal{L}_+\mathcal{L}_+\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_-\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_-\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+\hat{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

and unitarity condition $(\mathcal{L}_+)^+ = (\mathcal{L}_-)^{-1}$.

These are known as dual descriptions [3, 4]. It will turn out that this is not necessarily the duality between quantum group and its enveloping algebra $G_q \leftrightarrow U_q(g)$ as also the latter can take the form (a) and vice versa (cf. the Iwasawa decomposition for $SL_q(2, \mathbb{C})$ [5, 6]).

2. The seven generators of the q -Lorentz group [1] can be put into three matrices of type (1) and can be identified with a more suitable set of generators $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ [3, 7]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &\equiv \begin{pmatrix} l^{-1} & 0 \\ \lambda L^+ & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{-1/4} & 0 \\ q\lambda T^+(\tau^3)^{-1/4} & (\tau^3)^{1/4} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_- &\equiv \begin{pmatrix} l & -q\lambda L^- \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tau^3)^{1/4} & -\lambda/q T^-(\tau^3)^{-1/4} \\ 0 & (\tau^3)^{-1/4} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_b &\equiv \begin{pmatrix} k & -q\lambda K^1 \\ \lambda K^2 & \tilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^1(\tau^3)^{1/4} & \lambda S^1(\tau^3)^{-1/4} \\ \lambda T^2(\tau^3)^{1/4} & \sigma^2(\tau^3)^{-1/4} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

The new choice of generators exhibits a purely quadratic algebra for the quantum Lorentz group. As usual, the analogues of the Cartan subalgebra generators are accompanied by some kind of inverses l^{-1} and \tilde{k} . Since, in the deformed case, the generators of the transformation correspond to finite shifts rather than infinitesimal ones (giving rise to discrete spectra), they can be identified with entries in the quantum matrices corresponding to the deformed Lie group.

The commutation relations of the q -Lorentz algebra are given by the R -matrix Equations (5) for the rotation subalgebra and the following relations

$$\hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_b = \mathcal{L}_b\mathcal{L}_b\hat{R}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}\mathcal{L}_+\mathcal{L}_b &= \mathcal{L}_b\mathcal{L}_+\hat{R}, \\ \hat{R}\mathcal{L}_b\mathcal{L}_- &= \mathcal{L}_-\mathcal{L}_b\hat{R}. \end{aligned} \quad (8)$$

While the deformation of the rotation subalgebra is of type (b), the boost containing subalgebra takes the form (a); the remaining relations are given similarly (8).

3. We list now the explicit relations and compare them with those of [1]. We can read off for the rotation subalgebra from (6) using (2)

$$\begin{aligned} L^+l &= qll^+, \\ L^-l &= q^{-1}lL^-, \\ [L^+, L^-] &= q^{-1}\lambda^{-1}(l^{-2} - l^2). \end{aligned} \quad (9)$$

This equates also to

$$\begin{aligned} \tau^3T^+ &= q^{-4}T^+\tau^3, \\ \tau^3T^- &= q^4T^-\tau^3, \\ T^+T^- &= q^2T^-T^+ + q\lambda^{-1}(1 - \tau^3), \end{aligned} \quad (10)$$

as proposed. The relations among rotations and boosts are

$$\begin{aligned} kL^+ &= q^{-1}L^+k + q^{-1}\lambda l^{-1}K^2, & kL^- &= q^{-1}L^-k + q^{-1}\lambda lK^1, \\ \tilde{k}L^+ &= qL^+\tilde{k} - \lambda K^2l, & \tilde{k}L^- &= qL^-\tilde{k} - \lambda K^1l^{-1}, \\ kl &= lk, & \tilde{k}l &= l\tilde{k}, \\ K^1L^+ &= L^+K^1 - q^{-1}\lambda^{-1}(l^{-1}\tilde{k} - lk), & K^1L^- &= L^-K^1, \\ K^2L^+ &= L^+K^2, & K^2L^- &= L^-K^2 + q^{-1}\lambda^{-1}(kl^{-1} - l\tilde{k}), \\ K^1l &= q^{-1}lK^1, & K^2l &= qlK^2, \end{aligned} \quad (11)$$

matching

$$\begin{aligned} \tau^1T^+ &= T^+\tau^1 + \lambda T^2, & \tau^1T^- &= q^{-2}T^-\tau^1 - \lambda S^1, \\ \sigma^2T^+ &= T^+\sigma^2 - q^2\lambda\tau^3T^2, & \sigma^2T^- &= q^2T^-\sigma^2 + q^2\lambda S^1, \\ \tau^1\tau^3 &= \tau^3\tau^1, & \sigma^2\tau^3 &= \tau^3\sigma^2, \\ S^1T^+ &= q^{-2}T^+S^1 - q^{-2}\lambda^{-1}(\tau^3\tau^1 - \sigma^2), & S^1T^- &= T^-S^1, \\ T^2T^+ &= q^2T^+T^2, & T^2T^- &= T^-T^2 + \lambda^{-1}(\tau^1 - \sigma^2), \\ S^1\tau^3 &= q^{-4}\tau^3S^1, & T^2\tau^3 &= q^4\tau^3T^2. \end{aligned} \quad (12)$$

And for the boost containing subalgebra, we find

$$\begin{aligned} kK^1 &= qK^1k, & kK^2 &= qK^2k, \\ \tilde{k}K^1 &= q^{-1}K^1\tilde{k}, & \tilde{k}K^2 &= q^{-1}K^2\tilde{k}, \\ K^1K^2 &= K^2K^1, & k\tilde{k} &= \tilde{k}k - q\lambda^3K^1K^2, \end{aligned} \quad (13)$$

which corresponds to

$$\begin{aligned} \tau^1S^1 &= S^1\tau^1, & \tau^1T^2 &= q^2T^2\tau^1, \\ \sigma^2S^1 &= S^1\sigma^2, & \sigma^2T^2 &= q^{-2}T^2\sigma^2, \\ S^1T^2 &= T^2S^1, & \tau^1\sigma^2 &= \sigma^2\tau^1 + q\lambda^3S^1T^2. \end{aligned} \quad (14)$$

The requirement of unimodularity of \mathcal{L}_b reduces the number of independent generators of Lorentz group to six as discussed in [7], i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \det_q \mathcal{L}_b = k\tilde{k} + q\lambda^2K^1K^2 \\ &= \tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2S^1T^2. \end{aligned} \quad (15)$$

This relation can be used to eliminate \tilde{k} in the same manner as the relation $ll^{-1} = \mathbf{1}$ to eliminate l^{-1} . For the structure and computations, it is of advantage to use the quadratic algebra $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ rather than $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$.

4. The comultiplications is generated by matrix multiplication (3). For the rotation part, one gets

$$\begin{aligned} \Delta(l) &= l \otimes l, \\ \Delta(L^+) &= L^+ \otimes l^{-1} + l \otimes L^+, \\ \Delta(L^-) &= L^- \otimes l + l^{-1} \otimes L^-, \end{aligned} \quad (16)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \Delta(\tau^3) &= \tau^3 \otimes \tau^3, \\ \Delta(T^+) &= T^+ \otimes \mathbf{1} + (\tau^3)^{1/2} \otimes T^+, \\ \Delta(T^-) &= T^- \otimes \mathbf{1} + (\tau^3)^{1/2} \otimes T^-, \end{aligned} \quad (17)$$

and for the boost containing part one finds

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= k \otimes k - q\lambda^2K^1 \otimes K^2, \\ \Delta(\tilde{k}) &= \tilde{k} \otimes \tilde{k} - q\lambda^2K^2 \otimes K^1, \\ \Delta(K^1) &= K^1 \otimes \tilde{k} + k \otimes K^1, \\ \Delta(K^2) &= K^2 \otimes k + \tilde{k} \otimes K^2. \end{aligned} \quad (18)$$

which corresponds to

$$\begin{aligned}\Delta(\tau^1) &= \tau^1 \otimes \tau^1 + \lambda^2 S^1 (\tau^3)^{-1/2} \otimes T^2, \\ \Delta(\sigma^2) &= \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \lambda^2 T^2 (\tau^3)^{1/2} \otimes S^1, \\ \Delta(S^1) &= S^1 \otimes \sigma^2 + (\tau^3)^{1/2} \tau^1 \otimes S^1, \\ \Delta(T^2) &= T^2 \otimes \tau^1 + (\tau^3)^{-1/2} \sigma^2 \otimes T^2.\end{aligned}\tag{19}$$

In the new generators the comultiplication takes a simple quadratic form.

5. The involution of the Lorentz algebra simply follows from (crossing) unitarity of \mathcal{L}_+ and \mathcal{L}_- and unitarity of \mathcal{L}_b

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_+)^+ &= (\mathcal{L}_-)^{-1}: \begin{pmatrix} \bar{l}^{-1} & \lambda \bar{L}^+ \\ 0 & \bar{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^{-1} & \lambda L^- \\ 0 & l \end{pmatrix}, \\ (\mathcal{L}_b)^+ &= (\mathcal{L}_b)^{-1}: \begin{pmatrix} \bar{k} & \lambda \bar{K}^2 \\ -q\lambda \bar{K}^1 & \bar{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k} & \lambda K^1 \\ -q\lambda K^2 & k \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{20}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\bar{l} &= l, \\ \bar{k} &= \tilde{k}, \\ \bar{L}^+ &= L^-, \\ \bar{K}^1 &= K^2\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\bar{T}^\pm &= q^{\mp 2} T^\mp, \\ \bar{\tau}^3 &= \tau^3, \\ \bar{T}^2 &= -(\tau^3)^{-1/2} S^1, \\ \bar{S}^1 &= -q^2 (\tau^3)^{1/2} T^2, \\ \bar{\tau}^1 &= (\tau^3)^{-1/2} \sigma^2, \\ \bar{\sigma}^2 &= (\tau^3)^{1/2} \tau^1.\end{aligned}\tag{21}$$

Thus, we observe again a simple structure for the proposed choice of generators having linear conjugation relations. By construction, the conjugation is compatible with the relations (9), (11), (13).

6. The quantization of Lie algebras and Lie groups is related via a pairing duality [3, 4]

$$\begin{aligned}\langle . | . \rangle: G_q \otimes U_q(g) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle \mathbf{L}^\pm | \mathbf{T} \rangle &= \mathbf{R}^\pm,\end{aligned}\tag{22}$$

$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^- = P\mathbf{R}^{-1}P$. This gives a representation of the quantum Lorentz algebra in terms of submatrices of the R -matrix of the Lorentz group \mathbf{R} built from the R -matrix of $SL_q(2)$ [8, 7]: $\mathbf{R}_{1234} = R_{23}R_{13}R_{24}R_{14}^{-1}$.^{*} This is sometimes called the ‘fundamental’ or ‘adjoint’ representation for the q -deformed Lie algebra, since one can understand the R -matrix as a matrix of structure constants of the deformed Lie algebra. In terms of the group $SL_q(2, \mathbb{C})$, a vector X^{ab} transforms with $M \times M$ ($(A \times B)_{kl}^{ij} = A_{ik}B_l^j$). As a consequence we find the decomposition [7]

$$\mathbf{L}_{21}^+ = \mathcal{L}_+ \times \mathcal{L}_b, \quad \mathbf{L}_{21}^- = \mathcal{L}_b \times \mathcal{L}_-. \quad (23)$$

Relations (5), (7), and (8) give the according relations (5) for \mathbf{R} and \mathbf{L}^\pm . From the 18 nonvanishing elements of \mathbf{L}^+ and \mathbf{L}^- , one can isolate the factors and finds the ‘ q -adjoint’ representation

$$\begin{aligned} L^+ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \end{pmatrix}, & L^- &= \begin{pmatrix} \cdot & 1 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ l &= \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} \end{pmatrix}, & l^{-1} &= \begin{pmatrix} q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \\ K^1 &= \begin{pmatrix} \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & K^2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ k &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, & \tilde{k} &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\lambda^2 & q^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

This shows that the algebra $(L^+, L^-, l, l^{-1}, K^1, K^2, k, \tilde{k})$ is from the R -matrix point of view [3] the canonical one. Moreover, this representation is faithful and hence, gives an independent proof that (9), (11), and (13) is the q -deformed Lorentz algebra

*Using a different R -matrix, this method was applied in [9] leading, however, to a complicated structure with infinite power series in the generators; the relation to the algebras discussed here is not evident.

associated to the q -deformed Lorentz group of [8, 5, 1]. It could have been used to introduce $U_q(\text{sl}(2, \mathbb{C}))$.

7. Fields with spin are usually described by multicomponent spinors. The action of Lorentz transformations on spin space can be constructed out of the representations $(\frac{1}{2}, 0)$ and $(0, \frac{1}{2})$. The Dirac representation is the sum of these two. This representation can be found in the quadratic part of the associated Clifford algebra of the quantum Lorentz group [10], $\omega = q + q^{-1}$, g the metric in the basis (A, B, C, D)

$$\sigma^{IJ} = \frac{1}{2} [\gamma^J, \gamma^I]_V = \gamma^J \gamma^I + \frac{q}{\omega} g^{IJ},$$

$$g = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ q^{-2} & . & . & . \\ . & . & -q\lambda & -1 \\ . & . & -1 & . \end{pmatrix}. \quad (25)$$

V is an interchanging operator related to R such that the σ^{IJ} are q -antisymmetric
 $V\sigma = -\sigma$.

There is an identification with the undeformed γ -matrices

$$\begin{aligned} \gamma^A &= \frac{1}{2q} (\gamma^1 - i\gamma^2), \\ \gamma^B &= \frac{q}{2} (\gamma^1 + i\gamma^2), \\ \gamma^C &= \frac{1}{2} (q^2 \gamma^0 + \gamma^3) + \frac{i}{2} (q^2 - 1) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \\ \gamma^D &= \frac{1}{2} (\gamma^0 - \gamma^3). \end{aligned} \quad (26)$$

The chiral generators have the representation

$$\begin{aligned} M^+ &\sim q^{-1} \sigma^{BD}, & M^- &\sim q^{-1} \sigma^{AC}, \\ M^3 &\sim -q \sigma^{AB} + q^{-1} \sigma^{CD}, & N^3 &\sim q^{-1} (\sigma^{AB} + \sigma^{CD}), \\ N^+ &\sim q \sigma^{AD}, & N^- &\sim -q^{-3} \sigma^{CB}, \end{aligned} \quad (27)$$

obeying the chiral q -Lorentz algebra introduced in [2]

$$\begin{aligned} q^2 M^3 M^+ - q^{-2} M^+ M^3 &= \omega M^+, \\ q^{-1} M^+ M^- - q M^- M^+ &= M^3, \\ q^{-2} M^3 M^- - q^2 M^- M^3 &= -\omega M^-, \\ q^{-2} N^3 N^+ - q^2 N^+ N^3 &= \omega N^-, \\ q N^+ N^- - q^{-1} N^- N^+ &= N^3, \\ q^2 N^3 N^- - q^{-2} N^- N^3 &= -\omega N^+. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} q^{-1}N^\pm M^\pm - qM^\pm N^\pm &= 0, \\ qN^\pm M^\mp - q^{-1}M^\mp N^\pm &= 0, \\ [M^\pm, N^3] &= 0, \quad [N^\pm, M^3] = 0, \quad [M^3, N^3] = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

The seven generators $(T^+, T^-, \tau^3, \tau^1, \sigma^2, S^1, T^2)$ in terms of the chiral ones are

$$\begin{aligned} T^+ &= M^+ + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}N^+, \\ T^- &= M^- + q(1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}N^-, \\ \tau^3 &= (1 - \lambda M^3)(1 + \lambda N^3)^{-1}, \\ \tau^1 &= (1 - \lambda M^3)^{-1/2}, \\ \sigma^2 &= (1 - \lambda M^3)^{1/2}[1 - q\lambda^2(1 + \lambda N^3)^{-1}]N^- M^+, \\ T^2 &= q^{-1}(1 - \lambda M^3)^{-1/2}M^+, \\ S^1 &= -(1 - \lambda M^3)^{1/2}(1 + \lambda N^3)^{-1}N^-. \end{aligned} \tag{30}$$

Hence, it is easy to give the $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ representation using (27) and a chiral representation of the usual γ -matrices, e.g. take*

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \end{pmatrix}, \\ \tau^3 &= \begin{pmatrix} q^2 & . & . & . \\ . & q^{-2} & . & . \\ . & . & q^{-2} & . \\ . & . & . & q^2 \end{pmatrix}, \\ T^+ &= \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & -q^{-1} \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & -q & . \end{pmatrix}, \\ S^1 &= \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{31}$$

*The matrices γ^2 and γ^3 have a unusual sign to make (31) agree with the action of the generators on spinors as used in [1].

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} q^{-1} & & & & \\ & q & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} q & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & q^{-1} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Representations of higher spin follow by use of the comultiplication on q -symmetrized spinors.

Using the relations (6), the spin representation for the new generators is

$$\begin{aligned} L^+ &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & L^- &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} \cdot & q^{-1} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \\ l &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & & & \cdot \\ \cdot & 1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, & l^{-1} &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & & & \cdot \\ \cdot & q & & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \\ K^1 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, & K^2 &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ k &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & & & \cdot \\ \cdot & q & & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, & \tilde{k} &= q^{-1/2} \begin{pmatrix} q & & & \cdot \\ \cdot & 1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{32}$$

The conjugation on this representation is given as follows. The Dirac spinor is of type $\psi^r = (x, y, -q^{1/2}\bar{y}, q^{-1/2}\bar{x})$, where x and y span a complex quantum plane [1]. Then the involution is given using the spinor metric ε

$$\psi^* = S\psi, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ -q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

For the matrix representation, we thus have for L any generator in the Dirac representation

$$L^+ \equiv (\bar{L})^t = SLS^{-1} \quad (34)$$

which agrees with the relations (21).

References

1. Schmidke, W. B., Wess, J., and Zumino, B., A q -deformed Lorentz Algebra, *Z. Phys. C* **52**, 471 (1991).
2. Ogievetsky, O., Schmidke, W. B., Wess, J., and Zumino, B., Six generator q -deformed Lorentz algebra, *Lett. Math. Phys.* **23**, 233 (1991).
3. Reshetikhin, N. Yu., Takhtadzhyan, L. A., and Faddeev, L. D., Quantizatin of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.* **1**, 193 (1990).
4. Majid, S., Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations, *Internat. J. Modern Phys.* **5**, 1 (1990).
5. Podles, P. and Woronowicz, S. L., Quantum deformation of Lorentz group, *Comm. Math. Phys.* **133**, 381 (1990).
6. Takeuchi, M., Finite dimensional representations of the quantum Lorentz group, *Comm. Math. Phys.* **144**, 557 (1992).
7. Schirrmacher, A., Aspects of quantising Lorentz symmetry, in J. Fröhlich *et al.* (eds) *New Symmetry Principles in Quantum Field Theory*, Cargèse, NATO ASI B295, Plenum, London, New York, 1992, pp. 505–512.
8. Carow-Watamura, U., Schlieker, M., Scholl, M., and Watamura, S., A quantum Lorentz group, *Internat. J. Modern Phys. A* **6**, 3081 (1991).
9. Drabant, B., Schlieker, M., Weich, W., and Zumino B., Complex quantum groups and their quantum enveloping algebras, in R. Gielerak *et al.* (eds), *Quantum Groups and Related Topics*, Math. Phys. Stud. **13**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, pp. 13–22.
10. Schirrmacher, A., Quantum groups, quantum spacetime, and the Dirac equation, in H. Osborn (ed), *Low-Dimensional Topology and Quantum Field Theory*, Cambridge, NATO ASI, Plenum, London, New York, 1993, pp. 221–230.

LETTER TO THE EDITOR

Multiparameter R -matrices and their quantum groups

Arne Schirrmacher

Max-Planck-Institut für Physik, Werner-Heisenberg-Institut, PO Box 40 12 12, Munich,
Federal Republic of Germany

Received 7 May 1991

Abstract. Multiparameter solutions of the Yang–Baxter equation associated with the groups of types A, B, C, D are given as generalizations of the well known one-parameter solutions. The R -matrix approach to quantum groups used here is related to the algebraic one of Reshetikhin.

Much has been said about quantum groups based on the so-called standard solutions of the (quantum) Yang–Baxter equation (YBE) [1, 2] while on multiparameter quantum groups only a small number of publications is at hand [3–7]. In this letter it is shown that there exist natural multiparametric generalizations of the standard solutions.

A simple example [8] will be used to introduce notation and to distinguish different types of deformation parameters. The main part of this letter presents multiparametric R -matrix solutions of the YBE associated with the groups of types A, B, C, D, and shows how they are obtained by explicitly solving the YBE. These results are then related to the algebraic approach of Reshetikhin [5] by translating it to a ‘Hopf algebra free’ formulation of the R -matrix approach of Takhtajan and others [2]. We conclude with some remarks on the prospects of multiparameter quantum groups and its applications.

As in ordinary group theory there are three structures that are related by a quantum group: the group itself given as a matrix of non-commuting entries, a coordinate space transformed by the group action, and the Lie algebra associated to the group that is in general also deformed. The commutation relations can be represented most simply using the R -matrix. Let us consider the two-dimensional general linear group as an example ($R \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$):

	notation	relations
quantum group	$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12}$
quantum plane	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$(\hat{R} - 1)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = 0$
quantum Lie algebra	T^\pm, H, K	$R_{12}L_2^\pm L_1^\pm = L_1^\pm L_2^\pm R_{12}$ $R_{12}L_2^+ L_1^- = L_1^- L_2^+ R_{12}$

where $\hat{R} = PR$, P is the permutation matrix, the normalization s.t. $\hat{R}_{ii}^{ii} = 1$, and L^\pm are matrix functionals of the generators T^\pm, H, K .

It has been shown, that if one starts with choosing a q -plane

$$xy = q yx \quad (2)$$

and a deformation of the Lie algebra relations of $gl(2)$ with parameter r

$$[T^+, T^-] = [H]_r \equiv \frac{r^H - r^{-H}}{r - r^{-1}} \quad [T^\pm, H] = \pm T^\pm \quad [K, \dots] = 0 \quad (3)$$

this corresponds to the following R -matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 1/r^2 & q/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

The matrix functionals are in this case:

$$L^+ = \begin{pmatrix} p^{(H+K)/2} & 0 \\ (r-1/r) \tilde{T}^+ & q^{(-H+K)/2} \end{pmatrix} \quad L^- = \begin{pmatrix} q^{-(H+K)/2} & -(r-1/r) \tilde{T}^- \\ 0 & p^{(H-K)/2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

where $p \equiv r^2/q$, $\tilde{T}^+ \equiv (q/r)^{H/2} T^+$, $\tilde{T}^- \equiv T^- (q/r)^{H/2}$.

The group deformation then is to be:

$$\begin{aligned} ab &= \frac{r^2}{q} ba & cd &= \frac{r^2}{q} dc & bc &= \frac{q^2}{r^2} cb \\ ac &= q ca & bd &= q db & ad - da &= \frac{r^2 - 1}{q} bc \end{aligned} \quad (6)$$

which is the two-parameter deformation of $GL(2)$. A second quantum plane of exterior variables ξ , η , that can be interpreted as differentials of x and y , is also determined:

$$\xi\eta = -\frac{q}{r^2} \eta\xi. \quad (7)$$

The determinant can be defined and becomes central for $q = r$ which allows us to define $SL_q(2)$. (For details see [8], note the different notations for the second parameter r , $X = r^2$, or $p = r^2/q$.)

The underlying field for the coefficients has tacitly been assumed to be C and 'real' versions of the group can be obtained by giving an appropriate conjugation. There are, however, two ways to do this:

$$\begin{aligned} (a) \quad \bar{x} &= y & \bar{y} &= x \\ (b) \quad \bar{x} &= x & \bar{y} &= y. \end{aligned} \quad (8)$$

Since we require $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$ the plane relations give:

$$\begin{aligned} xy = qxy &\longrightarrow (a) \quad xy = \bar{q}yx \\ &\quad (b) \quad xy = \frac{1}{q}yx. \end{aligned} \quad (9)$$

For the group parameters conjugation has to be:

$$(a) \quad \bar{T} = STS = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(b) \quad \bar{T} = T$$

and hence

$$ab = \frac{r^2}{q} ba \longrightarrow (a) \quad d = \frac{\bar{r}^2}{\bar{q}} dc \quad \text{etc} \quad (11)$$

$$(b) \quad ab = \frac{\bar{q}}{r^2} ba \quad \text{etc}$$

yielding for the parameters

$$(a) \quad q, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (12)$$

$$(b) \quad q = e^{i\vartheta} \quad r^2 = e^{i\Theta} \quad \vartheta, \Theta \in \mathbb{R}.$$

i.e. both deformation parameters are either real or pure phases. These groups may be denoted as $GL_{r^2, q}(2, \mathbb{R})$ and $GL_{\Theta, \vartheta}(2, \mathbb{R})$, respectively.

Unitary groups can be found by requiring

$$T^+ = T^{-1} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -pc \\ -b/p & a \end{pmatrix} D^{-1} \quad (13)$$

giving the group $U_{r^2, \vartheta}(2)$, where $q = r e^{i\vartheta}$, and $SU_r(2)$, where $q = r \in \mathbb{R}$, with two and one real deformation parameters, respectively. ($D = ad - qc b$ is the determinant [8].) This can be seen from, for example,

$$ac = q ca \longrightarrow bD^{-1}dD^{-1} = \bar{q}dD^{-1}bD^{-1} \Rightarrow bd = \frac{q^2}{r^2} db \quad (= q db!) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \bar{q}q = r^2.$$

Remark. In this paper we do not consider Hopf-*algebra quantum groups of an extended algebra with barred and unbarred generators providing mixed commutation relations. For distinction we write $GL(2)$ instead of $GL(2, \mathbb{C})$. Such extensions are in general not difficult to find but not necessarily unique [9].

The procedure followed in the last section generalizes for $GL(n)$ and with some restrictions also for $SL(n)$, i.e. A_{n-1} . Similarly one can proceed for the classical series of semi-simple groups B_n , C_n , D_n , i.e. $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$, $SO(2n)$.

A_{n-1} —the groups $GL(n)$ and $SL(n)$. As in the two-dimensional case the Lie algebra has still one deformation parameter; the quantum space relations, however, can be chosen to be deformed more generally:

$$x^i x^j = q_{ij} x^j x^i \quad i < j \quad (15)$$

providing a total of $N_{\text{GL}} = n(n - 1)/2 + 1$ parameters (q_{ij} and r) for the corresponding R -matrix ($\mathbf{R} = R_{kl}^{ij} e_i^k \otimes e_j^l$):

$$R_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j \left(\delta^{ij} + \Theta^{ij} \frac{1}{q_{ij}} + \Theta^{ij} \frac{q_{ji}}{r^2} \right) + \delta_l^i \delta_k^j \Theta^{ij} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \quad (16)$$

where Θ^{ij} equals 1 for $i > j$ and zero otherwise. Note, no summation over repeated indices is involved here. The group relations given by this R -matrix are not difficult to work out and can be found in [6].

To arrive at the quantized $\text{SL}(n)$ from $\text{GL}_{r^2; q_{ij}}(n)$ it is necessary to make the determinant D central before it can consistently be identified with unity. In the GL case the determinant has the following property [6]:

$$T_k^i D = \frac{\prod_{\alpha=1}^{k-1} q_{\alpha k} \prod_{\gamma=k+1}^n (r^2/q_{k\gamma})}{\prod_{\beta=1}^{i-1} q_{\beta i} \prod_{\delta=i+1}^n (r^2/q_{i\delta})} D T_k^i. \quad (17)$$

In order to render the factor picked up to unity, one can simply choose all q 's equal to r . This gives the well known one-parameter deformation $\text{SL}_r(n)$. More generally the centrality of the determinant can be achieved by requiring

$$q_{1,i} q_{2,i} \cdots q_{i-1,i} \frac{r^2}{q_{i,i+1}} \cdots \frac{r^2}{q_{i,n}} = \text{constant} \quad (18)$$

for all $i = 1, \dots, n$. This last requirement results in $n-1$ conditions among the q_{ij} 's in addition to determining constant $= r^{n-1}$. The number of deformation parameters has been reduced to $N_{\text{SL}} = N_{\text{GL}} - (n-1) = (n-1)(n-2)/2 + 1$.

To give an example consider $\text{SL}_{r^2; q_{ij}}(4)$ with $q_{14} = r^3/q_{12}q_{13}$, $q_{24} = rq_{12}/q_{23}$ and $q_{34} = r/q_{13}q_{23}$.

There are again two ways to impose reality conditions on $\text{GL}(n)$ ($i' \equiv n+1-i$):

$$(a) \quad \bar{x}_i = x^i \quad \bar{T} = T \quad q_{ij} = e^{i\theta_{ij}} \quad r^2 = e^{i\Theta} \quad (19)$$

$$(b) \quad \bar{x}_i = x^{i'} \quad \bar{T}_k^i = T_k^{i'} \quad \bar{q}_{ij} = q_{j'i'} \quad r^2 \in \mathbb{R}.$$

giving $\text{GL}_{\Theta; q_{ij}}(n, \mathbb{R})$ and $\text{GL}_{r^2; \bar{q}_{ij}=q_{j'i'}}(n, \mathbb{R})$ and similarly for SL. Deriving the unitary versions is left to the reader.

B_n , C_n , D_n —orthogonal and symplectic groups. For the groups of types B, C, D an additional structure, the metric, has to be implemented in a consistent manner. The metric C defines a length $L = x^i C x$ and provides the orthogonality (or symplectic) relation

$$TC^{-1}T^t C = 1 = C^{-1}T^t CT \quad (20)$$

for quantum matrices T . Roughly speaking, it is the required centrality of the length forcing the metric to be anti-diagonal. (Clearly, it can be diagonalized in the classical limit):

$$C_{ij} = c_i \delta_{ij}, \quad (j' \equiv n+1-j) \quad \text{with } c_i c_{i'} = \pm 1. \quad (21)$$

(The last requirement is not necessarily so at this stage but has been made to facilitate the argument; it can be motivated, for example, by consistency of double conjugation, see below (38).) Hence also in the R -matrix a piece containing primed indices appears. We make the following ansatz (motivated by the 'standard' solutions):

$$R_{kl}^{ij} = r \left[\delta_k^i \delta_l^j \left(\frac{1}{q_{ij}} \right) + \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\delta_l^i \delta_k^j \Theta^{ij} + \delta^{ij'} \delta_{kl} \Theta_k^i a_k^i \right) \right] \quad (22)$$

where Θ is as above and a_k^i are coefficients to be determined. Inserting the orthogonality condition, $T = C^{-1}(T^t)^{-1}CT$, into the group relations, $RT_1T_2 = T_2T_1R$, it follows that

$$R = C_1^{-1} R^{t_1} C_1 = C_2^{-1} (R^{-1})^{t_2} C_2 \quad (23)$$

implying for (22)

$$R_{kl}^{ij} = \frac{c_i c_j}{c_k c_l} R_{i'j'}^{k'l'} . \quad (24)$$

As in the GL case we have $q_{ii} = 1$ and $q_{ji} = r^2/q_{ij}$ and hence (24) yields

$$q_{ij} = \frac{r^2}{q_{i'j'}} = \frac{r^2}{q_{i'j'}} = q_{i'j'} \quad (25)$$

i.e. q_{ij} , $i < j \leq n/2$, give all q 's.

Having fixed the relations among the q 's, one finds that the relations for the a_k^i 's from the YBE decouple. From (24) we get

$$a_k^i = a_{i'}^{k'} \quad (26)$$

and the YBE provides

$$a_j^i a_k^j = -a_k^i \quad (27)$$

and

$$\begin{aligned} a_{n/2}^{n/2+1} &= -1 & \text{or} & & + \frac{1}{r^2} & \quad n \text{ even} \\ a_{(n-1)/2}^{(n+3)/2} &= -r & & & & \quad n \text{ odd.} \end{aligned} \quad (28)$$

In combination (26) and (27) are now a recursive set of relations that can be solved using the 'initial conditions' (28). Taking also into account that we have to meet the orthogonality relation (24), one finds $a_k^i = -\epsilon_i \epsilon_k r^{\hat{i}-\hat{k}}$ where \hat{i} are integers determined by the above conditions and the ϵ 's matter only in the symplectic case. Equation (28) yields:

$$(\hat{1} \dots) = \begin{cases} (m - \frac{1}{2}, m - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} - m) & \text{for } B_m \\ (m, m - 1, \dots, 1, -1, \dots, 1 - m, -m) & \text{for } C_m \\ (m - 1, m - 2, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, 1 - m) & \text{for } D_m. \end{cases} \quad (29)$$

The c_i 's of the metric have to be chosen as

$$C_{ij} = \epsilon_i r^{\hat{i}} \delta_{ij}, \quad \text{with } \epsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{for } B_m \text{ and } D_m \\ +1 & \text{for } C_m \text{ and } i \leq m \\ -1 & \text{for } C_m \text{ and } i > m \end{cases} \quad (30)$$

thus $c_i c_{i'} = -1$ only for symplectic groups. In the notation of [2] we have:

$$\begin{aligned} R = r \sum_{i \neq i'}^n e_{ii} \otimes e_{ii} + e_{(n+1)/2, (n+1)/2} \otimes e_{(n+1)/2, (n+1)/2} \\ + \sum_{\substack{i < j \\ i \neq j'}}^n \frac{r}{q_{ij}} e_{ii} \otimes e_{jj} + \sum_{\substack{i > j \\ i \neq j'}}^n \frac{q_{ji}}{r} e_{ii} \otimes e_{jj} + \frac{1}{r} \sum_{i \neq i'}^n e_{ii} \otimes e_{i'i'} \\ + \left(r - \frac{1}{r} \right) \left[\sum_{i > j}^n e_{ij} \otimes e_{ji} - \text{sum}_{i > j}^n r^{\hat{i}-\hat{j}} \epsilon_i \epsilon_j e_{ij} \otimes e_{i'j'} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

with (29) and (30). The second term is only present for the B_m case.

Inspection of the classical limits shows the association with the indicated groups. It turns out that the non-diagonal parts of the multiparameter R -matrices coincide with the standard solutions (cf e.g. [2])—they coincide anyway for all $q_{ij} = r$ —and also the characteristic equation depends only on the Lie algebra deformation parameter r and matches those for the standard solutions ($r = q$) if one normalizes \hat{R} appropriately ($\hat{R}_{ii}^{ii} = 1$):

$$\begin{aligned} \left(\hat{R} - 1 \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\hat{R} - \frac{1}{r^n} \right) = 0 & \quad \text{for } \text{SO}(n) \\ \left(\hat{R} - 1 \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\hat{R} + \frac{1}{r^{n+2}} \right) = 0 & \quad \text{for } \text{Sp}(n). \end{aligned} \quad (32)$$

Remark: Strictly speaking, the orthogonal groups are just $O(n)$ rather than $\text{SO}(n)$, i.e. the determinant is ± 1 . It is, however, possible to use the isomorphy $\text{SO}(n) \simeq O(n)/Z_2$ by identification of pairs of quantum matrices having different sign of the determinants, e.g. $T \sim \text{diag}(-1, 1, 1, \dots) T$. Alternatively one could require the determinant condition explicitly.

Example: $\text{SO}_{r^2, q}(4)$. The two-parameter orthogonal group in four dimensions illustrates the greater generality of multiparameter quantum groups. Since the characteristic equation coincides with that of the standard solutions, so does the projector decomposition of \hat{R} [2]. The relations for the quantum vector space are:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = q x_2 x_1 & \quad x_1 x_3 = \frac{r^2}{q} x_3 x_1 & \quad x_2 x_3 = x_3 x_2 \\ x_2 x_4 = q x_4 x_2 & \quad x_3 x_4 = \frac{r^2}{q} x_4 x_3 & \quad x_1 x_4 = x_4 x_1 - \left(r - \frac{1}{r} \right) x_2 x_3 \end{aligned} \quad (33)$$

and for the exterior coordinates, $(\xi^i)^2 = 0$, we find:

$$\begin{aligned} \xi_1\xi_2 + \frac{q}{r^2}\xi_2\xi_1 &= 0 & \xi_1\xi_3 + \frac{1}{q}\xi_3\xi_1 &= 0 & \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_2 &= \left(r - \frac{1}{r}\right)\xi_1\xi_4 \\ \xi_2\xi_4 + \frac{q}{r^2}\xi_4\xi_2 &= 0 & \xi_3\xi_4 + \frac{1}{q}\xi_4\xi_3 &= 0 & \xi_1\xi_4 + \xi_4\xi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

The metric (21)

$$C = \begin{pmatrix} & & r^{-1} \\ & 1 & \\ r & & \end{pmatrix} \quad (35)$$

gives the central length

$$L = r^{-1}x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + rx_4x_1 = (r + r^{-1})(x_1x_4 + rx_2x_3). \quad (36)$$

Interestingly enough, the two-parameter R -matrix for $\text{SO}(4)$ cannot be constructed as the tensor product of two $\text{SL}(2)$ (unless $q = r$) [10]:

$$R(\text{SO}_{r,q}(4)) \neq R(\text{SL}_p(2)) \otimes R(\text{SL}_{p'}(2)). \quad (37)$$

Real versions. Conjugation can be defined trivially $\bar{x} = x$, $\bar{T} = T$, or with help of the metric

$$\bar{x}^i = \bar{x}_i = C_{ik}^t x^k \quad \text{i.e.} \quad \bar{x}_i = c_{it} x^{i'} \quad (38)$$

$$T^+ = T^{-1} \quad \text{i.e.} \quad \bar{T} = (T^{-1})^t. \quad (39)$$

Compatibility with the quantum group relations can be checked by computing the adjoint of

$$\hat{R} \cdot (T \otimes T) = (T \otimes T) \cdot \hat{R}. \quad (40)$$

One finds

$$\check{R}^+ \cdot (T \otimes T) = (T \otimes T) \cdot \check{R}^+ \quad (41)$$

where $\check{R} = RP$. This holds if the R -matrix obeys

$$\overline{(R_{ij}^{lk})} = R_{kl}^{ji} \quad \text{i.e.} \quad \overline{q_{ij}} q_{ij} = r^2 \in \mathbf{R} \quad \text{or} \quad q_{ij} = r e^{i\theta_{ij}}. \quad (42)$$

The plane deformation parameters q_{ij} exhibit a deformation structure which one could call ‘radial quantization’, where the parameter r provides the modulus for all q ’s combined with an independent phase. Hence, taking real deformation parameters its number stays the same as without reality condition.

In order to investigate the signature of the metric one can define ‘real’ coordinates:

$$y^k = \begin{cases} x^k + c_k x^{k'} & k \leq \frac{n+1}{2} \\ i(c_{k'} x^{k'} - x^k) & k > \frac{n+1}{2} \end{cases} \implies \overline{y^k} = y^k. \quad (43)$$

Under this transformation the metric becomes

$$C \rightarrow \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & i\left(c_1 - \frac{1}{c_1}\right) \\ i\left(c_n - \frac{1}{c_n}\right) & 1 + c_n^2 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Since for $r \rightarrow 1$ all c_i become unity, this reality condition gives the quantum groups $\text{SO}_{r^2, v_{ij}}(n, \mathbb{R})$.

In the other case $\bar{x} = x$ (thus the coordinates are already ‘real’) diagonalization of the antidiagonal metric makes us arrive at $\text{SO}_{\Theta, v_{ij}}(n/2, n/2)$ and $\text{SO}_{\Theta, v_{ij}}((n+1)/2, (n-1)/2)$ for n even and odd, respectively. Constructing deformed groups of other signature is a more involved topic that needs more complicated R -matrices. For the Lorenz group it is not yet clear whether one or two independent parameters can be found.

Reshetikhin has developed a derivation of multiparameter R -matrices from the standard one-parameter versions employing the universal R -matrix living in the tensor product of an algebra A with itself and having Hopf algebra properties [5]. It can be shown that a second element of the tensor algebra, given in terms of the generators of the Cartan subalgebra of the associated deformed Lie algebra, provides a transformation yielding a new universal R -matrix. By representation the numerical multiparameter R -matrix is constructed.

It is easy, however, to translate this algebraist approach to a simple matrix formalism on the lines of Takhtajan [2] and others omitting the detour to the universal R -matrices [13]: The definition of a Hopf algebra with comultiplication Δ and an universal $R \in A \otimes A$ s.t.

$$(\Delta \otimes \text{id})R = R_{13}R_{23} \quad (\text{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12} \quad \sigma \circ \Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1} \quad (45)$$

implies the Yang-Baxter equation

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (46)$$

which contains all information we need in the R -matrix approach to quantum groups.

Reshetikhin requires for an additional element $F \in A \otimes A$

$$(\Delta \otimes \text{id})F = F_{13}F_{23} \quad (\text{id} \otimes \Delta)F = F_{13}F_{12} \quad F_{12}F_{21} = 1 \quad (47)$$

and also the YBE

$$F_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}F_{12}. \quad (48)$$

Then $R^F \equiv F^{-1}RF^{-1}$ is also a solution of the YBE.

Applying $(\sigma \circ \Delta \otimes \text{id})$ on F in two different ways, firstly letting σ simply interchange the embeddings and secondly using the last equality of (45), one finds:

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \Delta \otimes \text{id})(F) &= \sigma_{12}(F_{13}F_{23}) = F_{23}F_{13} \\ &= R_{12}F_{13}F_{23}R_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (49)$$

i.e.

$$R_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}R_{12} \quad (50)$$

and similarly using $(\text{id} \otimes \sigma \circ \Delta)(F)$

$$F_{12}F_{13}R_{23} = R_{23}F_{13}F_{12} . \quad (51)$$

Like the YBE for R , also those for F and for mixed R and F can now simply be considered as matrix equations. With this 'translation' it needs just a triangular ($F_{12}F_{21} = 1$) solution of the YBE that obeys also (50) and (51) in order to associate a new R -matrix to a given one. (At this stage the construction obviously becomes circular since we need a solution of the YBE in order to find a new one; it turns out, however, that rather trivial solutions help.)

If we choose $F = \text{diag}(f_{11}, f_{12}, \dots, f_{nn})$ with $f_{ij}f_{ji} = 1$, it is easy to show that

$$F^{-1} R(GL_r) F^{-1} = R(GL_{r^2; q_{ij}}) \quad q_{ij} \equiv r f_{ij}^2 \quad (52)$$

i.e. the standard one-parameter deformation is transformed to the multiparameter deformation (16). (In terms of \hat{R} this is a similarity transformation that, however, does not decompose into a simple tensor product $F \neq f \otimes g$.)

By the same means the multiparameter versions of the R -matrices of types B, C, D are related to the standard solutions since, having an additional term of type $\delta^{ij}\delta_{kl}$, equations (50) and (51) require in addition

$$f_{ij} = \frac{1}{f_{i'j'}} = \frac{1}{f_{i'j}} = f_{i'j'} \quad (53)$$

which turns out to be equivalent to (25).

This R -matrix formulation also provides a nice way to verify the results of the last section. Using (49), (50) and (51) one can reduce the YBE for R^F to those for R and F alone.

Remark. There are nonetheless additional one-parameter solutions of the YBE that are related to the 'standard' one by a non-diagonal matrix [12,13]. Since the entry structure of these R -matrices is more complicated, more restricting relations of type (53) arise making multiparameter versions almost always impossible.

In accordance with the abstract treatment of Reshetikhin we have explicitly shown, that for groups of type A, B, C, D that $r(r-1)/2+1$ quantization parameters emerge from solving the YBE if r is the rank of the group. It is the maximal number of deformation parameters for quantum groups with the same structure of commutation relation as the standard solutions.

To give an idea of the coherence of multiparameter quantum groups, we note that the fact that $GL(n)$ and $Sp(2n)$ are of the same rank corresponds to the fact that a $2n$ -dimensional phase space built from a n -dimensional linear space (cf Zumino's construction [14]) allow for symplectic transformations also in the deformed case not restricting the possible multiparametric deformation structure.

A many-parameter deformation of a group provides many one-parameter deformations. Thus this letter does not intend to persuade the reader to use always the

most general deformation structure possible but rather points out that different parameter fixings lead to different structures with few or only one parameter having different properties. See, for example, [15] exhibiting that it is the deformation $GL_{1,q}$ rather than the 'standard' deformation $GL_{q^2;q}$ that seems to be suitable to define a path integral.

In general, it will depend on the physical application which deformation structure is appropriate. Hoping that the 'standard' one will do is, however, not justified.

Very fruitful discussions with J Schwenk, K Schmüdgen and A Kempf are acknowledged.

References

- [1] Jimbo M 1986 Quantum R -matrix for the generalized Toda system *Commun. Math. Phys.* **102** 537
- [2] Takhtajan L A 1989 *Quantum Groups and Integrable Models (Advanced Studies in Pure Mathematics 19)* (Tokyo: Kinokuniya) p 435; 1990 Introduction to quantum groups *Quantum Groups (Proceedings Clausthal 1989)* ed H-D Doebner and J-D Hennig (Berlin: Springer)
- [3] Sudbery A 1990 Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$ *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** L697; 1990 Matrix-element bialgebras determined by quadratic coordinate algebras *Preprint* University of York
- [4] Demidov D D, Manin Yu I, Mukhin E E and Zhdanovich D V 1990 Non-standard quantum deformations of $GL(n)$ and constant solutions of the Yang-Baxter equation *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102**
- [5] Reshetikhin N 1990 Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras *Lett. Math. Phys.* **20** 331
- [6] Schirrmacher A 1991 The multiparametric deformation of $GL(n)$ and the covariant differential calculus on the quantum vector space *Z. Phys. C* **50** 321
- [7] Fairlie D B and Zachos C K 1991 Multiparameter associative generalizations of canonical commutation relations and quantized planes *Phys. Lett.* **256 B** 43
- [8] Schirrmacher A, Wess J and Zumino B 1991 The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and lie algebra *Z. Phys. C* **49** 317
- [9] Zakrzewski S 1991 private communication
- [10] Woronowicz S L and Zakrzewski S Quantum deformations of Lorentz group Hopf-**-algebra level *Preprint* Warsaw
- [11] Ommelka M 1990 private communication
- [12] Cremmer E and Gervais J-L 1990 The quantum group structure associated with non-linearly extended Virasoro algebras *Commun. Math. Phys.* **134** 619
- [13] Ge M-L and Xue K 1991 Exotic solutions of the YBE and the quantum group structures *Quantum Groups* ed T Curtright *et al* (Singapore: World Scientific) p 97
- [14] Kempf A, private communication; 1991 *Proc. XXth DGM Conference (New York, 3-7 June 1991)* (Singapore: World Scientific)
- [15] Zumino B 1991 Deformations of the quantum mechanical phase space with bosonic and fermionic coordinates *Preprint* UCB-PTH-91/1
- [16] Baulieu L and Floratos E G 1990 Path integral on the quantum plane *Preprint* LPTENS 90-34, PAR-LPTHE 90-54